
NÉ MIEI DOLCI STVDI M'ACQVETO
EX LIBRIS
CAROLI VIGANÓ

DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO.

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guaſtallæ, &c.

AVCTORE

IOANNE CEVA
Mediolanenſi.

MEDIOLANI

Ex Typographia Ludouici Montiæ. MDCLXXVIII.
SVPERIORVM PERMISSV.

SERENISSIMO MANTVÆ DVCI

FERDINANDO CAROLO.

Timerem, Sereniſſime Dux, præfigere tam ſplendida nomina exiguo huic libello, niſi publici iuris eſſet, præſidio Principum ſe, atque ſua tueri. Scilicet Sereniſſimos hos Soles lucere omnibus voluit luminum Pater, & Moderator Deus, vt latè proijcerent beneficum iubar ſuper vulgus mortalium. Quod ſi vnicuique fas eſt bona, fortunaſq; ſuas credere tam grandi patrocinio; quantò æquius hoc idem ſibi depoſcunt inermes literæ, præſertim Geometria, cui ſi deſit Mæcenatum vmbra, deeſt vigor omnis & vita. Nam amœnior literatura, cæteræque ſcientiæ ferme omnes habent theatra, porticus, & propugnatores ſuos; pauci verò Geometriæ latus ſtipant, pauci ſcientiarum omnium Reginæ excubias agunt. Nihil illi ſplendida proſunt natalia, nihil dignitas, nihil collata mortalibus beneficia. Illam igitur tibi ſupplicem ſiſto verende Princeps, vt ex hoc Sereniſsimo faſtigio Celſitudinis Tuæ patrocinium ſibi vindicet & tutelam. Te interim, Heros fortiſsime, ſeruent Superi nobis, & bonis artibus incolumem diù. Hanc enim præcelſam indolem tuam, & magnæ mentis perſpicaciam, hoc robur animi, clementiam, & decus auguſtæ frontis nemo eſt, qui non ſuſpiciat, atq; in his non cenſeat collocatam ſpem maximam publicæ felicitatis. Vale.

Sereniſsimæ Celſitudinis Tuæ

Humillimus Seruus

Ioannes Ceua.

·PROŒMIVM·

COnſideranti mihi ſæpius in hac viciſsitudine rerum, ac fortunarum, quam opportunum foret calamitatum leuamen philoſophari, quamque ij felices demum, fortunatiq; habendi eſſent, quos ab otio ſcientiarum nullæ auocant, atque ſeiungunt curæ; ſubijt animum, erigere (quantum fas eßet) literis, ingenioque territam infortunijs adoleſcentiam meam. Itaque geometriam ingreſſus, quæ & rerum varietate, & genere ipſo cæteris anteire viſa eſt, cum Apollonij, Archimedis, Pappi, aliorumque inuenta egregia, atque miranda percellerent animum, raperentque (vt eſt præceps ſine conſilio iuuentus) libuit dare vela ventis, ſi fortè noua littora, & nemini hactenus cognitas regiones caſus aliquis aperiret. Quadraturam circuli, & adhuc indomitam hyperbolam rimari cæpi; videlicet ſpem fecerant haud exiguam fruſtum cylindricum, ſolidumque hyperbolicum totum penè à me in pyramidem coactum. Ter mihi conciliata recti, et curui diſsidia inſomnes noctes perſuaſere; ter normam fugit figura contumax, et tenax ſui. Tamen, vt fruſtratis ſemel, iterumque laboribus lux aliqua, ſpeſque noua ſubinde oriebatur, tandiu relabenti ſaxo Siſyphus peruicax inhæſi, donec adhibita nouiſsimè irrito ſucceßu indiuiſibilia Cauallerij omnem animi pertinaciam domuere. Ergo auocato hinc animo (neque enim ſine altiori conſilio poſitum hoc frænum humanis mentibus crediderim) geometricis, ac mecanicis rationibus iunctis inuicem, permixtiſque, nouum quidpiam in lucem proferre conceſsit Deus, ſolatium aliquod deluſi in rebus magnis ingenij. Namque conſuetis geometriæ apparatibus relictis, ſubſtitutiſque linearum vice ponderibus, dum rationes quaſdam examino ſucceſsit cogitatio, pluraque ſepulta hactenus, atque ignota prodiere in lucem. Rei nouitas, atque vtilitas perſuaſit hoc qualecunque inuentum publici iuris facere, ratus aliorum ingenio, ac perſpicacia (vt ſæpe fit) rude, impolitumque initium perfectum iri.

Inſtitutum noſtrum eſt problemata quamplura, quorum ardua, & ſæpe etiam inextricabilis foret ſolutio iuxta conſuetas leges, nulla adhibita circulorum, linearumque praua conſtructione, vt mos eſt apud geometras, ſolis ponderibus ſtaticè enodare; quod præſtabimus, quoties proponantur lineæ ſe inuicem ſecantes, quarũ ſectiones ita ſint determinatæ, vt qualibet variata, cæteras omnes variari neceſſe ſit. Hinc ſtaticam conſtructionem libuit appellare, quæ vtinam eius emolumenti ſit, compendijque quod mihi perſuadeo, & quod vnum oro, cupioq;. Neque enim adhæc ſcribenda cupiditas vlla famæ impulit, quam in tanta rerum, auctorumque celebritate inſani eſſet querere, leuioriſque animi deſiderare. Plura inuenies minus caſtigata, et quibus deſit ſuprema manus; da veniam ſucciſiuis horis, quas mihi adhæc elaboranda vix reliquere, partim curæ ſeueriores, partim etiam amicorum, et familiarium querimoniæ malè in his collocatum iuuentutis florem exiſtimantium. Si quid porrò haud omnino contemnendum fuerit, Donato Roſſetto inter Mathematicos noſtri æui egregio, præſtantiſſimoque, cuius primis inſtitutionibus, ſi quid in me eſt bonarum artium, debeo, tu quoque humaniſſime lector debes. Vale.

STATICÆ
CONSTRVCTIONIS
LIBER PRIMVS.

AXIOMATA.

I.

Grauia ex communi centro grauitatis ſuſpenſa, ita ponderant, ac ſi tota eorum grauitas eſſet in prædicto centro grauitatis.

II.

Pondera in eadem poſitione vnicũ habent centrũ grauitatis.

PETITIO.

Propoſito quolibet pondere aliud reperiri poſſe ad quod habeat datum pondus quamlibet imperatam rationem.

LEMMA I.

Pluribus datis ponderibus in qualibet poſitione, ſi ex centro grauitatis vnius, vel plurium eorum ducatur libra, quæ tranſeat per centrum grauitatis omnium, ea producta tranſibit per centrum grauitatis reliqui ponderis.

tab. I. fig. I.

SINT pondera ABCD, quorum omnium grauitatis centrum ſit E, illud autem ponderum AD ſit F, ducaturque FE; dico quod ſi producatur ad partes reliquorum ponderum BC, in ipſorum centrum cadet; ſi enim hoc non eſt, ſit G centrum grauitatis ponderum BC, itaut iuncta FG ſit extra lineam FE. Quoniam igitur FG iungit centra grauitatis ponderum BC, AD, ſi fiat vt BC ad AD, ita longitudo FM ad MG, erit in eadem libra FG centrum grauitatis eorumdem quatuor ponderum BCDA in priori illa poſitione manentium, quod cum vnicum ſit, non erit E, vt ponebatur.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt, quod ſi duo grauia BC iungantur libra aliqua BC, eorum centrum grauitatis erit in communi *tab. 1. fig. 2.* *ſectione H libræ B C iungentis centra grauium B C, & lineæ F H tranſeuntis per prædicta centra F, & E.* Centrum enim grauium B C tam eſt in F H, vt probatũ eſt, quam in B C, ergo erit H.

LEMMA II.

Sint duo pondera A B, quorum centrum grauitatis ſit F in libra A B, dico pondus A ad B eſſe, vt B F ad F A.

tab. 1. fig. 3. 6. Arch. æquipond. SI enim ita non eſt, ſit vt A ad B, ita B K ad K A; erit ergo K centrum grauitatis ponderum A B; quod cum vnicum ſit, non erit F, vt ponebatur.

PROP. I. PROB. I. ELEMENTVM I.

Sint duæ rectæ E A, C A, conuenientes in A, quibus occurrant duæ aliæ C D, E B, in D B punctis, quæ ſe inuicem ſecent in F. Propoſitum nobis ſit ex punctis E C A grauia I H G in ea ratione ſuſpendere, vt pondus G ad H eandem habeat rationem, quam C B ad B A; idem verò G ad I, eam quam E D ad D A; pondus verò I ad duo H G illam, quam habet B F ad F E, & graue H ad duo grauia I G ſit, vt D F ad F C.

tab. 1. fig. 4. Poſtulatum. REperiatur pondus H ad quod propoſitum quoduis G illam habeat rationem, quam recta C B ad B A; idem verò pondus G ad aliud I eam habeat rationem, quam habet recta E D ad D A; dico rectam B F ad F E eſſe, vt pondus I ad duo grauia G H; rectam verò D E ad ipſam F C, vt pondus H ad duo pondera I G.

axioma 1. Quoniam D C eſt quædam libra, in cuius extremo D eſt centrum grauitatis, & propterea totum pondus grauium G I, ac ſi vnum eſſent ſuſpenſum ex D; in alio verò extremo C eſt aliud pondus H, erit in eadem libra D C centrum grauitatis prædictorum ponderum G I, & H. Similiter, quia E B eſt alia quædam libra, in cuius extremo B eſt centrum grauitatis, & propterea totum pondus grauium G H; in alio verò extremo E eſt aliud pondus I, erit in eadem libra E B centrum grauitatis prædictorum ponderum G H, & I in priori illa poſitione exiſtentium.

ex primo lem. Cùm itaque pondera G I H in eodem ſitu conſiderata vnicum habeant centrum grauitatis; id verò tàm in libra D C, quàm in libra E B oſtenſum fuerit, in ſectione F neceſſariò exiſtet. Ergo vt pondus I ad duo ſimul G H, ita B F ad F E; Similiter vt pondus H ad alia duo ſimul G I, ita erit D F ad F C, quod erat faciendum. *ex 2. lem.*

COROLLARIVM.

Deducitur punctum F eſſe centrum grauitatis omnium grauium I G H in illa poſitione.

SCHOLIVM.

Hanc propoſitionem, & quatuor, quæ deinceps ſequuntur elementa voco, vtpotè prima fundamenta, quibus pleraq; nituntur.

Figuram hanc A E F C, iterum poſt tradita elementa, & non rarò exponemus; ſed ad vitandam multiplicitatem literarum, pondera G I H literis A E C ſignificabimus; aggregatum verò ex ponderibus G H, & alterum ex G I connotabimus litera B, & litera D, quippe quæ notant centrum grauitatis, in quo ponderant grauia ſuſpenſa ex A, & C, & ex A, & E; omnia verò pondera exprimemus litera F, quia ibi, vtpotè in centro grauitatis ponderant, vt dictum eſt.

PROP. II. PROB. II. ELEM. II.

Sit triangulum E A C, & ab angulis ipſius ducantur ad idem punctum F intra triangulum lineæ E F, A F, C F, quæ ex F productæ occurrant lateribus in punctis deinceps B K D; Inſtitutum eſt, ex prædictis angulis E A C ſuſpepdere grauia I G H; ita vt pondus G ad I ſit vt E D ad D A; idem G ad H, vt C B ad B A; H ad I, vt E K ad K C; pondus I ad duo G H, vt B F ad F E; pondus verò H ad duo I G, vt D F ad F C, & demum, vt vnicum G ad duo I H, ita K F ad F A.

FIat vt C B ad B A, ita pondus G ad H, & vt E D ad D A, ita idem pondus G ad I. *tab. 1. fig. 5.*

Quoniam igitur figura E D B A C F eſt illa primi elementi, eſtq; C B ad B A, vt G ad H, recta verò E D ad D A, vt G ad I; etiam D F ad F C, erit vt pondus H ad duo pondera I G; itemque B F ad F E, vt pondus I ad duo G H.

Inſuper quia F eſt centrum grauitatis, in quo eſt pondus grauiũ I G H, producta A F tranſibit per K centrum reliqui ponderis I H, *corol. p. 1. lem. 1.*

lem. 2. ergo vt pondus I ad H, ita C K ad K E.

Rurſus, quia A K eſt quædam libra, in cuius extremis A K ſunt pondera G, & I H, erit in eadem libra A K centrum grauitatis prędictorum *ax. 2.* ponderum I G H, quod cum ſit vnicum, ſitque in vtraque *lem. 2.* libra D C, E B vt ſuperius oſtendimus erit neceſſariò in F; ergo erit vt K F ad F A, ita pondus G ad duo ſimul I H, quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Cum hæc eadem reponetur figura, aggregatum ponderum I H, ſignificabimus litera K, eſt enim in K centrum grauitatis, & propterea pondus grauium I H.

PROP. III. PROB. III. ELEM. III.

In triangulo E A C ſe inuicem ſecent duæ lineæ in G, quarum E B ducta ex vertice E ſecet baſim in B, altera F D occurrat lateribus A E, C E, in F, & D. Propoſitum nobis ſit ex angulis eiuſdem trianguli grauia ſuſpendere; I in puncto C; duo L K in E, atque vnicum H in A, adeout K ad I ſit vt recta C D ad D E; I ad H, vt A B ad B C; H ad L, vt E F ad F A; L K ad H I, vt B G ad G E, & duo H L ad duo K I, vt D G ad G F.

tab. 1. fig. 6. SIt L quodlibet pondus, & reperiatur aliud H ad quod primum pondus L eam rationem habeat, quam A F ad F E. Ponatur deinde I, ad quod pondus H habeat illam rationem, in qua eſt C B ad B A; item inueniatur pondus K, ad quod pondus I habeat rationem, quam E D ad D C; dico problema eſſe abſolutum.

Quoniam enim F D eſt quædam libra, in cuius extremo F eſt centrum, & ideò pondus grauium H L; in alio verò extremo D, eſt pondus grauium K I (cum eorum grauitatis centrum ſit in puncto D) erit in eadem libra F D centrum grauitatis prædictorum ponderum H L K I. Similiter quoniam E B eſt libra in cuius extremo E ſunt grauia L K, in alio verò extremo B eſt pondus grauium H I, erit in eadem libra E B centrum grauitatis eorumdem ponderum L K H I in eadem priori poſitione exiſtentium: cum igitur tàm in libra F D, quam B E ſit centrum grauitatis ponderum L K H I, cumque illud vnicum ſit, erit in communi ſectione G, & propterea L K ad H I erunt, vt recta B G ad G E, & vt K I ad L H, ita F G ad G D, quod erat &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Aggregatum ponderum L K ſignificabimus litera E; pondus H litera A, & pondus I litera C connotabit; duo pondera K I exprimet D, duo L H litera F, & duo H I litera B indicabit; pondus verò L more analytico, ſeu algebrico ita ſcribemus F - A, hoc eſt F minus A, eademque ratione pondus K ita ſcribemus D - C; omnia verò pondera L H I K litera G ſignificabit.

PROP. IV. PROB. IV. ELEM. IV.

Inter duas quaſdam lineas A C, E F ſecent ſe inuicem in D tres lineæ E C, A F, B G; oportet ſuſpendere ex punctis A C E F grauia I H K L, itaut pondus L ad K ſit vt recta E G ad G F; K ad H, vt C D ad D E; H ad I, vt A B ad B C; I ad L, vt F D ad D A; & denique duo I H ad duo K L ſe habeant vt G D ad D B.

POndus quoddam I ad L habeat eam rationem, quam F D ad D A; L ad K eam, quam E G ad G F; & K ad H illam, quam C D ad D E. Dico iam problemati nos ſatisfeciſſe. *tab. 1. fig. 7.*

Quoniam G eſt centrum grauitatis grauium K L, idemq; D eſt centrum grauitatis, tùm grauium I L, cùm ipſorum K H, erit propterea punctum D centrum quatuor grauium K L H I; ducitur verò libra G B ex G per D, ergo punctum B, in quo ſecat libram A C erit centrum grauitatis reliquorum ponderum I H; quare vt eſt pondus H ad pondus I, ita A B ad B C. Rurſus quoniam B G eſt quædam alia libra, in cuius extremo B eſt centrum grauitatis, & propterea pondus grauium I H, & ſimiliter in alio extremo G pondus grauium K L, erit in eadem libra B G centrum grauitatis prædictorum omnium grauium I H K L, quod cum vnicum ſit, exiſtatque in D, erit vt I H ad K L, ita G D ad D B, quod &c.

SCHOLIVM.

Ponderibus I H L K correſpondebunt deinceps literæ A C F F; duobus verò I H litera B; duobus K L litera G; omnibus I H L K litera D; pro I L vſurpabimus A † F, hoc eſt A plus F, ſimiliterq; pro duabus K H alias duas literas E ; C minimè verò literam D, quæ ſignificat omnia pondera I H L K, vt diximus.

PROP.

PROP. V. PROB. V. ELEM. V.

Sit quadrilaterum A H I C, & in illo duæ lineæ B F G, E F D, oppoſitis lateribus occurrentes in punctis B G E D, & ſe inuicem ſecantes in F; proportio autem lineæ I G ad G H ſit compoſita ex rationibus partium reliquorum laterum, rectarum videlicet A E ad E H, C B ad B A, & I D ad D C. Propoſitum eſt pondera N M L K ex angulis H A C I ſuſpendere, ita vt pōdus K ad L ſit vt C D ad D I; L ad M, vt A B ad B C; M ad N, vt H E ad E A; N ad K, vt I G ad G H; & duo grauia ſimul N M ad duo L K ſimul, vt D F ad F E; tandem, vt duo N K ad duo M L, ita B F ad F G.

tab. 1. fig. 8. FIat pondus K ad L vt C D ad D I; L verò ad M vt B A ad B C, & M ad N vt H E ad E A; dico N ad K eſſe vt I G ad G H, & duo N M ad duo L K, vt D F ad F E.

Nam pondus N ad K componitur ex rationibus ponderum N ad M, M ad L, L ad K; Sed ex conſtructione, vt N ad M, ita recta A E ad E H; vt M ad L, ita recta C B ad B A; & vt L ad K, ita I D ad D C; ergo N ad K componitur ex rationibus rectarum A E ad E H, C B ad B A, & I D ad D C: verùm ex eiſdem rationibus componitur (vt ſuppoſitum eſt) proportio rectæ I G ad G H; ergo vt I G ad G H, ità reciprocè pondus N ad K; itaque punctum G eſt centrum grauitatis ponderum N K: & quia B G eſt quædam libra, in cuius extremo B eſt centrum grauitatis, atque adeò totum pondus grauium M L, itemque in alio extremo G pondus eſt grauium N K; erit in ipſa libra G B centrum grauitatis omnium grauium M L N K. Rurſus E D eſt alia libra, in cuius extremo E eſt centrum, & ideo pondus grauium N M, & in alio extremo D eſt eadem ratione pondus grauium L K; quare in hac etiam libra E D reperitur centrum grauitatis eorumdem grauium N M K L in illa priori poſitione. Cum igitur tam in libra G B, quàm in D E ſit centrum grauitatis prædictorum ponderum M L K N, illudque ſit vnicum, erit in communi ſectione F; itaque vt duo ſimul pondera M L ad N K, ſic erit G F ad F B, atque, vt duo M N ad duo K L, ita D F ad F E, quod &c.

COROLLARIVM.

Elicitur ex hac propoſitione, quod licet prædictum ſic ſectum

quadrilaterum non in eodem plano iaceat, ſemper tamen iunctæ E D, B G in vnico plano ſunt; & vlterius ea omnia contingunt, quæ ſupra oſtendimus. Cum enim demonſtratum ſit in vtraque libra E D, G B exiſtere centrum grauitatis omnium grauium N M L K, neceſſe eſt vt habeant aliquod punctum commune, in quo ſe inuicem ſecent, quod cum ita ſit, in eodem plano exiſtent.

SCHOLIVM.

Pondera M L K N exprimemus deinceps literis A C I H; duo verò M L litera B; duo L K litera D; duo K N litera G; duo N M litera E indicabimus; ſicuti, & quatuor N M L K litera F exprimemus.

Conſtructis iam, explicatiſque his quinque elementis, quæ vtilitas, ſerieſq; varia Theorematum ex eorum commixtione ſit ſequutura, & quanto Geometriæ bono, cuius fines amplificare hoc qualicumque inuento conati ſumus, palam ex ſequentibus propoſitionibus conſtabit.

LEMMA III.

SIt B centrum grauitatis ponderum A C. Dico pondus B, aggregatum videlicet grauium A C ponderantium in B eſſe ad pondus C, vt A C ad B A. Quoniam B eſt centrum grauitatis ponderum A C, erit A ad C, vt C B ad B A, ergo componendo erit pondus B ad C, vt C A ad B A, quod &c. *tab. 1. fig. 9.*

PROP. VI. PROB. VI.

Expoſita primi elementi figura A E C F, intelligantur in A E C pondera diſpoſita A E C eo modo, quo ibi expoſita fuere pondera G I H, ita vt D ſit centrum grauitatis ponderum A E; B ponderum A C, F omnium erunt itaque quatuor rationes A B ad B C, A D ad D E, E F ad F B, & C F ad F D, quarum duæ quælibet ſi ſecundùm numeros dentur, reliquas duas inueſtigabimus.

HVius problematis ſunt ſex caſus; etenim (vt ex arte combinatoria) ductis quatuor (quot videlicet rationes ſunt datæ) in tria, numerum ſcilicet vnitate deficientem exurgit 12, cuius medietas 6 præbet nobis numerum binariorum in quos diſtribui poteſt prædictus numerus 4.

Dentur

tab. 1. fig. 4. Dentur igitur primò duæ rationes EF ad FB, & CF ad FD, prior ſit vt 2 ad 1, altera autem vt 3 ad 2; debemus modo manifeſtare reliquas duas rationes CB ad BA, & ED ad DA.

Quoniam pondus B (aggregatum videlicet ex AC) ad C eſt (ex præmiſſo tertio lemmate) vt recta AC ad AB: componitur verò ratio ponderis B ad C ex rationibus ponderum B ad F, & F ad C: vt verò B ad F, ita EF ad EB, & vt F ad C, ita DC ad DF; erit ratio AC ad AB compoſita ex rationibus EF ad EB, & DC ad DF: quoniam verò EF ad FB eſt vt 2 ad 1, componendo autem, indè per conuerſionem rationis, & conuertendo, EF ad EB eſt vt 2 ad 3, ſuitque etiam CF ad FD, vt 3 ad 2, & componendo CD ad FD, vt 5 ad 2; erit recta AC ad AB compoſita ex rationibus 2 ad 3, & 5 ad 2, ſeu ex his, 2 ad 3, & 3 ad $1\frac{1}{5}$; hoc eſt eadem AC ad AB, vt 2 ad $1\frac{1}{5}$, ſeu vt 10 ad 6; quare diuidendo erit CB ad BA, vt 4 ad 6, ſeu vt 2 ad 3. Eadem ratione, quia pondus D ad E, componitur ex rationibus ponderum D ad F, & F ad E, rectarum vid. CF ad CD, atque EB ad BF; idem pondus D ad E, hoc eſt AE ad DA componetur ex rationibus 3 ad 5, & 3 ad 1: ex his verò rationibus componitur illa 3 ad $1\frac{2}{3}$, hoc eſt 9 ad 5; ergo AE ad DA eſt vt 9 ad 5, ſed diuidendo ED ad DA erit vt 4 ad 5, eſt ergo CB ad BA, vt 2 ad 3, & ED ad DA, vt 4 ad 5, quod erat faciendum.

II. ſint datæ duæ rationes EF ad FB, vt 4 ad 5, ED ad DA, vt 7 ad 9, debemus veſtigare reliquas rationes CF ad FD, & CB ad BA.

Ratio rectæ AC ad CB, ponderis videlicet B ad A componitur ex rationibus ponderum B ad E, & E ad A, rectarum videlicet EF ad FB, & AD ad DE, hoc eſt ex rationibus 4 ad 5, & 9 ad 7; quare AC ad CB componitur ex rationibus 4 ad 5, & 9 ad 7: hæc autem compoſita ratio eſt ea quam habet 4 ad $3\frac{8}{9}$, ſiue 36 ad 35, ergo AC ad CB eſt vt 36 ad 35, & diuidendo AB ad BC, vt 1 ad 35.

Similiter, quia CD ad CF, hoc eſt pondus F ad D componitur ex rationibus ponderum F ad E, & E ad D, rectarum videlicet EB ad BF, & DA ad AE, ex rationibus nempè 9 ad 5, & 9 ad 16; hæc autem ratio eadem eſt, ac illa, quam habet 9 ad $8\frac{8}{9}$, ſeu vt 81 ad 80, erit diuidendo DF ad FC, vt 1 ad 80.

III. quòd ſi datis duabus rationibus CF ad FD, vt 4 ad 5, & CB ad BA, vt 7 ad 9; dabimus etiam eo pacto, quo ſupra AD ad DE, vt 1 ad 35; & BF ad FE, vt 1 ad 80.

IV. Sit ratio ED ad DA, vt 20 ad 21, & CB ad BA, vt 99 ad 25, & oporteat notificare duas rationes EF ad FB, & CF ad FD. Componitur ratio rectæ CF ad FD, ponderis nempe D ad C, ex rationibus ponderum D ad A, & A ad C, hoc eſt rectarum EA ad ED, & CB ad BA, videlicet ex rationibus 41 ad 20, & 99 ad 25: ſed 41 ad $\frac{5}{99}$ componitur ex eiſdem rationibus; ergo CF ad DF eſt vt 41 ad $5\frac{5}{99}$, hoc eſt vt 4059 ad 500.

Eadem ratione quia EF ad FB, hoc eſt pondus B ad E componitur ex rationibus ponderum B ad A, & A ad E, linearum videlicet CA ad CB, & ED ad DA, nempe ex rationibus 124 ad 99, & 20 ad 21; cumque ex eiſdem rationibus componatur ratio, quam habet 124 ad $103\frac{19}{20}$, hoc eſt vt 2480 ad 2079, erit in eadem ratione EF ad FB.

V. Dentur duæ proportiones ED ad DA, vt 2 ad 1, & CF ad FD ęqualitatis, oportet reliquas duas inueſtigare, videlicet CB ad BA, & EF ad FB. Componitur CB ad BA, pondus nimirum A ad C ex rationibus ponderum A ad D ad C, rectarum videlicet ED ad EA, & CF ad FD; hoc eſt ex rationibus 2 ad 3, & 3 ad 3, eſt igitur CB ad BA, vt 2 ad 3.

Similiter EB ad FB, hoc eſt ratio ponderis F ad E componitur ex rationibus ponderum F ad D ad E, rectarum videlicet CD ad CF, & AE ad AD, hoc eſt ex rationibus 2 ad 1, & 3 ad 1; ſed ex eiſdem rationibus componitur 2 ad $\frac{1}{3}$, ſeu 6 ad 1, ergo EB ad BF eſt vt 6 ad 1, & diuidendo EF ad FB, vt 5 ad 1.

VI., & vltimo. Quòd ſi datæ proportiones fuerint CB ad BA, vt 2 ad 1, & EF ad FB æqualitatis oſtendemus (vt ſupra factum eſt) ED ad DA, vt 2 ad 3, & CF ad FD, vt 5 ad 1.

SCHOLIVM.

Quoties autem problema fuerit impoſſibile ex ipſa operatione dignoſcetur; ſi enim data fuerit ratio DF ad FC æqualitatis, & ſimiliter BF ad FE æqualitatis, dico eſſe impoſſibilem quæſtionem. Cum enim pondus C ad B, hoc eſt recta AB ad AC componatur ex rationibus ponderum C ad F, & F ad B, rectarum videlicet DF ad DC, & EB ad EF, hoc eſt rationum 1 ad 2, & 2 ad 1 erit pars AB ad totum AC, vt 1 ad 1 pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Hoc aut non diſſimile abſurdum ſemper ſe-

quitur quoties quæſtio propoſita eſt impoſſibilis.

Huius propoſitionis primam partem, ſeu caſum primum, cuius titulum tranſmiſeram amico meo, nulla adiecta, aut indicata ſolutione, demonſtrauit geometricè nobilis adoleſcens multitudine linguarum, artium, & ſcientiarum varietate conſpicuus Petrus Paulus Carauaggius Petri Pauli filius præceptoris ſui. Eius demonſtrationem appono, quæ methodum hanc ſtaticam geometrica in luce collocabit.

Sit E F ad F B, vt 2 ad 1, & C F ad F D, vt 3 ad 2; dico E D ad D A eſſe vt 4 ad 5, & C B ad B A, vt 2 ad 3.

tab. 1. fig. 9. DVcatur G H paralella E C. Quoniam E C ad G F, eſt vt C D ad D F, videlicet vt 5 ad 2, & E C ad F H, vt 15 ad 5, erit E C ad G H, vt 15 ad 11; pariterque A E ad A G, & A C ad A H, vt 15 ad 11; igitur quarum partium A E eſt 15, erit G E 4, ſimiliterque quarum partium A C eſt 15, erit H C 4; cum itaque ſit G E ad E D, vt C F ad C D, videlicet vt 3 ad 5; ſi vt 3 ad 5 ita fiat 4 ad alium numerum, prodibit numerus $\frac{20}{3}$ pro E D, cuius reſiduum ex E A 15 erit $\frac{25}{3}$; erit igitur E D ad D A, vt 4 ad 5.

Similiter quoniam, quarum partium A C eſt 15, C H eſt 4, eſtque C H ad C B, vt 2 ad 3; erit C B 6, & B A 9: quare C B ad B A erit vt 2 ad 3.

PROP. VII. THEOR. I.

Recta D B ſecet vtcumque triangulum E A C, itaut fiat triangulum D A B, & iungantur B E, D C ſe inuicem ſecantes in F; dico D F ad F C eam habere rationem, quam habet pyramis, cuius baſis triangulum A B D, & altitudo E F ad pyramidem, cuius baſis triangulum A E C, & altitudo F B.

tab. 1. fig. 10. QVoniam ratio ponderis C ad D, rectæ videlicet D F ad F C componitur ex rationibus ponderum C ad B ad E ad D, rectarum videlicet A B ad A C, E F ad F B, & A D ad A E: ex ijſdem verò rationibus componitur ratio parallelepipedi contenti rectangulo A B in E F, tanquam baſi, & altitudine D A, ad parallelepipedum contentum rectangulo A C in F B, tanquam baſi, altitudine verò A E; ergo D F ad F C eſt vt parallelepipedum

factum ex rectangulo A B in E F, altitudine D A, ad parallelepipedum ex A C in F B rectangnlo, & altitudine A E, ſeu vt parallelepipedum contentum rectangulo D A B, altitudine E F, ad parallelepipedum contentum rectangulo C A E, & altitudine F B: componitur autem ratio horum duorum parallelepipedorum ex ratione, quam habet rectangulum D A B baſis vnius, ad rectangulum C A E baſim alterius, & altitudo E F ad altitudinem F B; rectangulum verò D A B ad rectangulum C A E componitur ex rationibus rectarum A B ad A C, & D A ad A E, ex quibus componitur etiam triangulum D A B ad triangulum A E C, cum angulus A ad verticem communis ſit; ergo D F ad F C componitur ex rationibus trianguli D A B ad triangulum E A C, & rectæ E F ad F B; hoc eſt D F ad F C eſt in ea ratione in qua eſt pyramis, cuius baſis triangulum D A B, & altitudo E F, ad pyramidem, cuius baſis triangulum A E C, & altitudo F B, quod &c.

Ex Federico Command. in 23. 6.

COROLLARIVM.

Hinc conſtat, ſi E F fuerit æqualis ipſi F B, eſſe triangulum D A B ad triangulum A E C, vt eſt recta D F ad F C. Cum enim rectæ E F, F B ſint æquales altitudines prædictarum pyramidum, erunt iccircò inter ſe vt baſes.

LEMMA IV.

Si aliqua proportio fuerit compoſita ex pluribus deinceps rationibus, inde perturbato antecedentium, vel conſequentium ordine, ſiue etiam vtroque; vt fiant totidem aliæ rationes, component iſtæ eandem priorem rationem.

A	C	E	G	✠	K	M	✿✿✿✿✿✿✿✿	O
B	D	F	H	I	L	N	✿✿✿✿✿✿✿✿	P

A	✠	K	E	C	G	M	✿✿✿✿✿✿✿✿	Q
N	D	H	L	F	I	B	✿✿✿✿✿✿✿✿	R

SInt quotlibet rationes, puta ſeptem expoſitæ A ad B, C ad D, E ad F, G ad H, ✠ ad I, K ad L, & M ad N: ratio verò ex ipſis compoſita ſit O ad P. Perturbato iam ordine antecedentium

ACEG✠KM inter ſe quomodocunque, vt ſit A✠KECGM; vel ordine conſequentium BDFHILN; vt ſit NDHLFIB. Dico ſi ex rationibus A ad N, ✠ ad D, K ad H, E ad L, C ad F, G ad I, & M ad B fiat ratio Q ad R, hanc ſimilem eſſe priori O ad P.

Ex Clau. ad prop. 19.8. Nam ex multiplicatione laterum ACEG✠KM, vel ipſorum A✠KECGM fit ſemper idem productum; pariterque idem quod oritur ex ductu laterum BDFHILN, fit etiam ex multiplicatione laterum NDHLFIB; Ratio ergo producti priorum antecedentium ad productum priorum conſequentium erit eadem penitus ac illa producti poſtremarum, ſeù perturbatarum antecedentium, ad productum poſtremarum conſequentium; ſed vt O ad P, ita productum ex antecedentibus prioris ordinis ad productum primi ordinis conſequentium; itemque vt Q ad R ita productum ex ſecundi ordinis antecedentibus ad productum eiuſdem ordinis conſequentium; ergo ſi duæ illæ rationes productorum (vt oſtendimus) ſunt inter ſe ſimiles, neceſſe eſt vt quoque ſimiles ſint duæ rationes O ad P, & Q ad R, quod erat &c.

PROP. VIII. THEOR. II.

Poſita eadem figura propoſitionis ſeptimæ huius. Dico triangulum EAC ad triangulum DAB, eſſe vt triangulum EFC ad triangulum DFB.

tab. 1. fig. 10. *23. 6.* Ratio trianguli EAC ad triangulum DAB componitur ex rationibus laterum communem angulum EAC comprehendentiū, nimirū ex proportionibus EA ad AD, & CA ad AB; ſed ex vi primi elementi noſtri recta EA ad AD, pondus videlicet D ad E componitur ex rationibus ponderum D ad F ad E, ſeu ex rationibus rectarum CF ad CD, & EB ad BF; Itemque CA ad AB, hoc eſt pondus B ad C componitur ex proportionibus ponderum B ad F ad C, rectarum ſcilicet FE ad EB, & CD ad DF; ergo triangulum EAC ad triangulum DAB componitur ex rationibus rectarum CF ad CD, EB ad BF, FE ad EB, & CD ad DF, vel ex ijſdem, ordine ipſarum proportionum perturbato, hoc eſt ex rationibus rectarum CF ad CD, CD ad DF, FE ad EB, & EB ad BF: duæ verò priores componunt illam ex CF ad DF, & duæ poſtremæ componunt rationem ex FE ad BF; ergo triangulum EAC ad ipſum DAB componitur ex rationibus rectarum CF ad FD, & FE ad BF; ſed ex eiſdem circa æquales angulos ad verticem F componitur etiam triangulum EFC ad ipſum DFB; *23. 6.* ergo vt triangulum EAC ad ipſum DAB, ita triangulum EFC ad ipſum DFB.

PROP. IX. PROB. VII.

Expoſita ſecundi elementi figura, intellectiſque ponderibus eodem modo ſuſpenſis; datis duabus quibuſcunque rationibus ex ſex ED ad DA; AB ad BC; CK ad KE; KF ad FA; DF ad FC; & EF ad FB oporteat quatuor reliquas indagare.

HVius problematis ſunt quindecim caſus; nàm ducto 6 in 5 fit productum 30, cuius ſemiſſis eſt 15, numerus videlicet binariorum ex ſex deriuantium. *tab. 1. fig. 5.*

Sint igitur primum datæ duæ rationes ED ad DA, vt 6 ad 7; & AB ad BC, vt 8 ad 9; quas verò debemus manifeſtare ſint EF ad ad FB; DF ad FC; KF ad FA; EK ad KC.

Iam in figura EACF cùm datæ ſint duæ rationes ED ad DA, & AB ad BC, notæ erunt reliquæ duæ, videlicet DF ad FC, vt 16 ad 39, & EF ad FB, vt 34 ad 21: deinde quia in figura ACEF primi elementi dantur duæ rationes EF ad FB, vt 34 ad 21, & AB ad BC, vt 8 ad 9, dabuntur quoque duæ reliquæ rationes AF ad FK, vt 37 ad 18, & EK ad KC, vt 16 ad 21.

II. Quod ſi datæ rationes fuiſſent AB ad BC, vt 6 ad 7, & CK ad KE, vt 8 ad 9, darentur ſimiliter quatuor rationes BF ad FE, vt 16 ad 39; AF ad FK, vt 34 ad 21; CF ad FD, vt 37 ad 18; AD ad DE, vt 16 ad 21.

III. Si verò eſſent duæ datæ rationes CK ad KE, vt 6 ad 7, & ED ad DA, vt 8 ad 9, eodem modo notas reddemus quatuor rationes KF ad FA, vt 16 ad 39; CF ad FD, vt 34 ad 21; EF ad FB, vt 37 ad 18; & CB ad BA, vt 16 ad 21.

IV. Sint datæ duæ rationes AF ad FK, vt 21 ad 13; & EK ad KC, vt 10 ad 11, debemus quatuor reliquas inuenire, nempè ED ad DA; AB ad BC; EF ad FB, & CF ad FD. Quoniam in primo elemento, cuius vertex C centrum F ſunt datæ duæ rationes AF ad FK, vt 21 ad 13; EK ad KC, vt 10 ad 11; dabuntur duæ reliquæ

quæ E F ad F B, vt 23 ad 11, & A B ad B C, vt 10 ad 13; & quia rurſus in primo elemento, cuius vertex E, idemque centrum F ſunt datæ duæ rationes A F ad F K, vt 21 ad 13, & E K ad K C, vt 10 ad 11, reliquas item duas notificabimus; eritque E D ad D A, vt 13 ad 11, & C F ad F D, vt 24 ad 10.

V. Si verò datæ fuerint rationes duæ C F ad F D, vt 21 ad 13, & A D ad D E, vt 10 ad 11, erunt pariter notæ quatuor rationes A F ad F K, vt 23 ad 11; C K ad K E, vt 10 ad 13; A B ad B C, vt 13 ad 11, & E F ad F B, vt 24 ad 10.

VI. Et ſi datæ duæ rationes fuiſſent E F ad F B, vt 21 ad 13, & C B ad B A, vt 10 ad 11; eodem prorſus modo haberentur reliquæ quatuor rationes; hoc eſt C K ad K E, vt 13 ad 11; A F ad F K, vt 24 ad 10; C F ad F D, vt 23 ad 11, & A B ad B C, vt 10 ad 13.

VII. Habitis duabus rationibus E F ad F B æqualitatis, C F ad F D, vt 52 ad 18; & reliquas quatuor reperiemus. Eſt enim in elemento primo, cuius vertex A centrum F data vtraque ratio E F ad F B, & C F ad F D, quare duas reliquas non ignorabimus, videlicet C B ad B A, vt 17 ad 18, & A D ad D E, vt 35 ad 17. Sunt itaque datæ duæ rationes E F ad F B æqualitatis, & A B ad B C, vt 18 ad 17; propterea in primo elemento, cuius vertex C, & centrum F dabuntur etiam duæ reliquæ E K ad K C, vt 18 ad 35, & K F ad F A, vt 17 ad 53.

VIII. Et ſi datæ rationes fuiſſent E F ad F B æqualitatis, A F ad F K, vt 52 ad 18; cognoſcemus eadem ratione E K ad K C, vt 17 ad 18; C B ad B A, vt 35 ad 17; A D ad D E, vt 18 ad 35; & D F ad F C, vt 17 ad 53.

IX. At ſi duæ cognitæ rationes fuerint C F ad F D, vt 1 ad 1, A F ad F K, vt 52 ad 18; non latebunt quatuor reliquæ, eritque A D ad D E, vt 17 ad 18; E K ad K C, vt 35 ad 17; C B ad B A, vt 18 ad 35; & B F ad F E, vt 17 ad 53.

X. Sint datæ duæ rationes E D ad D A, vt 39 ad 105; B F ad F E, vt 105 ad 69, cognoſcemus etiam quatuor reliquas; nam in elemento primo, cuius vertex A, centrum F, dantur duæ expoſitæ rationes, ergo & duæ reliquæ palam fient, hoc eſt C F ad F D, vt 144 ad 30, & C B ad B A, vt 39 ad 30; Sed cum rurſus in alio elemento primo, cuius vertex C, idemque centrum F ſint notæ duæ rationes B F ad F E, vt 105 ad 69; & C B ad B A, vt 39 ad 30;

da-

dabuntur item reſiduæ rationes A F ad F K, vt 135 ad 39, & E K ad K C, vt 30 ad 105.

Reliqui verò quinque caſus ſimiles omninò ſunt huic ſupradicto decimo, licet diuerſa videatur poſitio, atque adeo eodem modo ſoluuntur, quod erat &c.

PROP. X. PROB. VIII.

Expoſita eadem ſecundi elementi figura, datiſque rationibus D A ad A B, & D E ad B C oporteat rationem C K ad K E manifeſtare.

SIT ratio D A ad A B, vt 2 ad 3, & D E ad B C, vt 5 ad 4; quia proportio C K ad K E, ponderis videlicet E ad C componitur ex rationibus ponderum E ad A ad C, rectarum videlicet A D ad D E, & C B ad B A; ex his autē rationibus componitur etiam rectangulum ex A D in C B, ad rectangulum ex D E in B A; quæ quidem rectangula componuntur etiam ex duabus rationibus D A ad B A, & C B ad D E, hoc eſt ex duabus 2 ad 3, & 4 ad 5; erit D A ad A B, vt 8 ad 15, nempè vt productum ex D A in C B ad productum ex B A in D E, quod erat &c. tab. 1. fig. 5.

Idem geometricè ex prædicto Petro Paulo Carauaggio Iuniore.

Quarum partium E D eſt 2, ſit C B 5; & quarum D A eſt 1, ſit A B 3. Dico C K ad K E eandem rationem habere, quam habet rectangulum ex A D in C B ad rectangulum ex E D in E B, videlicet vt 5 ad 6.

QVoniam enim vt A D ad D E, ita triangulum A C D ad triangulum D C E, vt autem A D ad D E, ita eſt triangulum A F D ad triangulum D F E; ergo vt A D ad D E, ita erit triangulum A C F ad triangulum F C E. Similiter erit vt C B ad B A, ita triangulum E F C ad triangulum E F A; habet igitur triangulum A F C ad triangulum A F E rationem compoſitam ex A D ad D E, & C B ad B A; ſed vt triangulum A F C ad triangulum A F E, ita C K ad K E; igitur C K ad K E habet rationem compoſitam 19. 5.

ſitam

ſitam ex AD ad DE, & CB ad BA; Sed ex ijſdem rationibus componitur ratio, quam habet rectangulum ex AD in BC ad rectangulum ex DE in BA; ergo vt rectangulum ex AD in BC ad rectangulum ex DE in BA, ita CK ad KE, quod erat &c.

Idem ego geometricè præſtiti nondum tradita mihi ſolutione Carauaggy, ſequenti lemmate præmiſſo.

LEMMA V.

Sit triangulum ABD, in quo ſe inuicem ſecent lineæ DGI, BGH, AGC in G; ex puncto autem A ducta FE parallela BD occurrat in punctis FE lineis CIF, & CHE; dico rectam FA eſſe æqualem AE.

tab. 2. PRoducantur BH, DI, donec occurrant in KL rectæ LK.
fig. 13. Quoniam DC ad LA eſt vt CG ad GA, vt autem CG ad
2. 6. GA, ita BC ad AK, erit vt DC ad LA, ita BC ad AK, & permutando
11. 5. DC ad CB, vt LA ad AK. Rurſus, quia CD ad AE eſt
vt CH ad HE; vt autem CH ad HE, ita BC ad EK, erit CD ad
AE, vt BC ad EK; & permutando CD ad CB, erit vt AE ad
EK: deniq; quoniam ſimiliter CD ad CB eſt vt LF ad FA, erunt
11. 5. tres rationes LA ad AK, AE ad EK, LF ad FA ſimiles eidem CD
ad CB, & propterea etiam inter ſe; cum itaque ſit vt LF ad FA,
ita AE ad EK, & componendo vt LA ad AF, ita AK ad EK, erit
permutando vt LA ad AK, ita AF ad EK; ſed vt LA ad AK, ita
11. 5. eſt quoque AE ad EK; ergo vt eſt AF ad EK, ita AE ad eandem
9. 5. EK; ergo FA, AE ſunt æquales, quod &c.

Detur triangulum AHE, ſeque in illo inuicem ſecent in I lineæ EK, FA, HD; datis deinde rationibus AK ad AD, & KH ad DE in numeris oporteat inueſtigare rationẽ EF ad FH.

tab. 2. DVcatur à puncto A recta BC parallela HE; à puncto verò
fig. 14. F per KD ductæ rectæ FB, FC ſecent BC in punctis BC,
ducatur denique ex A recta AG parallela CF occurrens producta
EH in G.

34. 1. Quoniam GA eſt parallela FC, & AC parallela GF, erit AF
ex lem. 5. parallelogrammum, eritque GF æqualis AC, hoc eſt AB; cùm

itaque

itaque ratio EF ad FH componatur ex duabus rationibus EF ad
FG, & FG ad FH, ſitque vt EF ad FG, ita ED ad DA, vtque
FG, hoc eſt AB ad FH, ita AK ad KH, erit ratio EF ad FH composita
ex duabus rationibus ED ad DA, & AK ad KH; ſed ex 22. 5.
ijſdem componitur ratio rectanguli ex AK in DE ad rectangulum
ex KH in AD, ſeu ex his duabus alijs KA ad AD, & DE ad
HK; igitur etiam EF ad FH componitur ex ijſdem rationibus
KA ad AD, & DE ad KH, quæ cum datæ ſint, ratio EF ad FH
manifeſta erit, quod &c.

PROP. XI. THEOR. III.

Expoſita rurſus figura ſecundi elementi EDABCKF; dico AE ad AC componi ex rationibus triangulorum CFB ad DFE; & rectangulorum DEK ad BCK.

COmponitur ratio EA ad AC ex rationibus AE ad AD ad tab. 1.
AB ad AC; ſimiliterq; ratio AE ad AD, ponderis nempè D fig. 5.
ad E componitur ex rationibus ponderum D ad C ad E, rectarum videlicet CF ad FD, & EK ad KC, pariterque AB ad AC, hoc eſt pondus C ad B componitur ex rationibus ponderum C ad E ad B, rectarum videlicet EK ad KC, & BF ad FE; ergo AE ad AC componitur ex rationibus CF ad FD, EK ad KC, AD ad AB, EK ad KC, & BF ad FE. Similiter AD ad AB componitur ex rationibus AD ad DE ad BC ad BA, ſeù ex ijſdem ordine perturbato, hoc eſt ex rationibus AD ad DE, CB ad BA, & ED ad CB; & ratio CK ad KE eſt illa, quæ componitur ex rationibus AD ad DE, & CB ad BA; quare AD ad AB conſtituetur ex rationibus CK ad KE, & ED ad CB; componitur igitur ratio AE ad AC ex rationibus CF ad FD, EK ad KC, CK ad KE, ED ad CB, EK ad KC, BF ad FE, quarum duæ EK ad KC, & KC ad KE conſtituunt vnicam KE ad KE æqualitatis, quæ cum non augeat, neque minuat rationum compoſitionem, neceſſe eſt vt AE ad AC componatur ex quatuor rationibus CF ad FD, ED ad CB, EK ad KC, & BF ad FE, vel ex ijſdem perturbato earundem ordine, videlicet ex CF ad FD, BF ad FE, ED ad CB, & EK ad KC; ſunt autem duæ priores rationes CF ad FD, BF ad FE illæ, quæ componunt rationem, quam habet triangulum CFB ad

C DFE,

DFE, cum duo anguli ad verticem F æquales ſint; duæ verò poſtremæ E D ad C B, & E K ad K C componunt rectangulum D E K ad rectangulum B C K; ergo A E ad A C componitur ex rationibus trianguli C F B ad triangulum D F E, & rectanguli D E K ad rectangulum B C K, quod &c.

PROP. XII. PROB. IX.

Expoſita tertij elementi figura, ex quinque verò rationibus, de quibus in ipſo egimus elemento, datis tribus quibuſcunque oportet reliquas duas manifeſtare.

HVius problematis ſunt decem caſus; nam numerus quinque reſoluitur in decem numeros binarios; ducto ſiquidem 5 in 4 fit 20, cuius medietas eſt 10.

tab.2. fig.15. Sint primùm datæ tres rationes A F ad F E, vt 3 ad 4, B G ad G E æqualitatis, & C D ad D E, vt 5 ad 4, debemus reliquas duas inueſtigare, hoc eſt F G ad G D, & A B ad B C; & quia in hoc caſu tantùm non debet A C eſſe parallela F D, ducamus à puncto A parallelam A H I.

Quoniam B G ad G H componitur ex rationibus B G ad G E, & G E ad G H; eſtque G E ad G H, vt E F ad F A; erit B G ad G H compoſita ex rationibus B G ad G E, & E F ad F A, videlicet ex rationibus 4 ad 4, & 4 ad 3; & ideò B G ad G H erit vt 4 ad 3; & diuidendo, B H ad H G, vt 1 ad 3; ſed H G ad H E eſt vt 3 ad 7; ergo ex æquali B H ad H E erit vt 1 ad 7. Rurſus C D ad D I componitur ex proportionibus C D ad D E ad D I; ſed E D ad D I eſt vt E F ad F A; ergo C D ad D I compoſita eſt ex rationibus C D ad D E, & E F ad F A, imò ex rationibus 5 ad 4, & 4 ad 3; quare C D ad D I eſt vt 5 ad 3; & diuidendo, C I ad I D, vt 2 ad 3; I D verò ad I E, hoc eſt A F ad F E, vt 3 ad 7; igitur ex æquali, vt C I ad I E, ita 2 ad 7; cum igitur in figura primi elementi, cuius vertex C, & centrum H, datæ ſint duæ rationes C I ad I E, vt 2 ad 7, & B H ad H E, vt 1 ad 7; etiam duæ reliquæ palàm fient, hoc eſt I H ad H A, vt 7 ad 9, & C B ad B A æqualitatis; vt verò I H ad H A, ita D G ad G F; ergo dedimus reliqnas duas rationes F G ad G D, vt 9 ad 7, & C B ad B A, vt 1 ad 1, videlicet æqualitatis.

II.

II. In inferiori figura eiuſdem tertij elementi dentur tres rationes C D ad D E, vt 7 ad 4; C B ad B A, vt 2 ad 4; & D G ad G F, vt 5 ad 11, oportet reliquas duas rationes A F ad F E, & E G ad G B aperire.

Componitur proportio E A ad E F, ponderis nempè F ad A ex proportionibus ponderum F ad D ad C ad A; rectarum videlicet D G ad G F; E C ad E D; & A B ad B C; ex rationibus nimirum 5 ad 11 ad 4 ad 2; quare E A ad E F eſt vt 5 ad 2, diuidendoque, erit A F ad F E, vt 3 ad 2.

Rurſus E B ad E G, hoc eſt pondus G ad B componitur ex proportionibus ponderum G ad D ad C ad B, rectarum videlicet D F ad F G, E C ad E D, & A B ad A C; imò ex rationibus 16 ad 11 ad 4 ad 6; itaque E B ad E G eſt vt 16 ad 6, & diuidendo B G ad G E, erit vt 10 ad 6.

III. Quòd ſi datæ tres rationes fuerint A F ad F E, vt 7 ad 4, A B ad B C, vt 2 ad 4, & F G ad G D, vt 5 ad 11, eodem prorſus modo oſtendemus C D ad D E, vt 3 ad 2, & B G ad G E, vt 5 ad 3.

IV. Dentur tres rationes B G ad G E, vt 8 ad 15; C D ad D E, vt 5 ad 7; & F G ad G D, vt 12 ad 11; debemus reliquas duas patefacere, hoc eſt A F ad F E, & A B ad B C. *tab.1. fig. 6.*

Recta A C ad A B, pondus videlicet B ad C, componitur ex rationibus ponderum B ad G ad D ad C, rectarum ſcilicet E G ad E B, F D ad F G, & C E ad E D; imò ex rationibus 15 ad 23 ad 12 ad 7; ergo A C ad A B eſt vt 15 ad 7, diuidendo verò eſt C B ad B A, vt 8 ad 7. Iam datis tribus proportionibus E D ad D C, vt 7 ad 5; F G ad G D, vt 12 ad 11; & C B ad B A, vt 8 ad 7; eo modo quo vſi ſumus in prima parte ſecundi caſus huius problematis, deprehendemus A F ad F E eſſe vt 3 ad 8.

V. Si verò cognitæ rationes erunt B G ad G E, vt 8 ad 15; A F ad F E, vt 5 ad 7; & D G ad G F, vt 12 ad 11; oſtendemus ſimiliter A B ad B C eſſe vt 8 ad 7; & C D ad D E, vt 3 ad 8.

VI. Habitis tribus rationibus E G ad G B æqualitatis, F G ad G D, vt 7 ad 3; & A B ad B C, vt 3 ad 2, debemus reperire reliquas duas A F ad F E, & C D ad D E. Componitur E C ad E D, pondus videlicet D ad C ex rationibus ponderum D ad G ad B ad C, imò ex rationibus 7 ad 10 ad 5 ad 3; ergo E C ad E D, eſt vt 7 ad 3; at diuidendo C D ad D E, vt 4 ad 3; itaque datis tribus rationibus B G ad G E æqualitatis; C D ad D E, vt 4 ad 3; & F G ad G D, vt

7

7 ad 3; dabitur etiam ex prima parte ſecundi caſus ratio A F ad F E, eritque vt 1 ad 2.

VII. Sint datæ tres rationes A F ad F E, vt 1 ad 6; E D ad D C, vt 5 ad 4; & A B ad B C, vt 5 ad 6; debemus duas reliquas notificare, nempe F G ad G D, & E G ad G B. Componitur F G ad G D, pondus nempe D ad F ex rationibus grauium D ad C ad A ad F, rectarum videlicet E C ad E D; A B ad B C; & E F ad E A; hoc eſt ex rationibus 9 ad 5 ad 6 ad 7, quare F G ad G D eſt vt 9 ad 7.

Deindè E B ad E G, hoc eſt pondus G ad B componitur ex rationibus grauium G ad D ad C ad B, rectarum nimirùm F D ad F G, E C ad E D, & A B ad A C; imò ex rationibus 16 ad 9 ad 5 ad 11; ergo E B ad E G eſt, vt 16 ad 11; diuidendo autem, erit B G ad G E, vt 5 ad 11.

VIII. Habitis tribus rationibus A F ad F E, rurſus vt 1 ad 6, F G ad G D, vt 9 ad 7; E D ad D C, vt 5 ad 4; oportet reliquas inueſtigare, duas ſcilicet A B ad B C, & E G ad G B. Componitur A B ad B C, hoc eſt graue C ad A ex rationibus grauium C ad D ad F ad A, rectarum nempe E D ad E C; F G ad G D; & E A ad F E; imò ex rationibus 5 ad 9 ad 7 ad 6; ergo A B ad B C eſt, vt 5 ad 6. Deinde quoniam pondus F-A ad pondus D-C componitur ex rationibus ponderum F-A ad F ad D ad D-C; rectarum ſcilicet A F ad A E, D G ad G F, & C E ad D C; imò ex rationibus 1 ad 7 ad 9 ad 4; erit F-A ad D-C, vt 1 ad 4; & componendo E ad D-C erit vt 5 ad 4; & quia D-C ad G componitur ex rationibus grauium D-C ad D ad G, hoc eſt rectarum D C ad C E, & F G ad F D; imò ex rationibus 4 ad 9 ad 16; erit D-C ad G, vt 4 ad 16; ſed prius E ad D-C fuit, vt 5 ad 4; ergo ex æquali E ad G, hoc eſt B G ad B E erit, vt 5 ad 16; conuertendo autem, indeque diuidendo, erit E G ad G B, vt 11 ad 5, quod &c.

IX. Proponantur tres rationes C D ad D E, vt 4 ad 5; E G ad G B, vt 11 ad 5; & A B ad B C, vt 5 ad 6; oporteatque indagare reliquas duas. Componitur A F ad F E, pondus videlicet F-A ad A ex rationibus grauium F-A ad E ad B ad A, & quia E ad D-C conſtituitur ex rationibus grauium E ad B ad C ad D-C, rectarum ſcilicet B G ad G E; A C ad A B; & E D ad D C; imò ex rationibus numerorum 5 ad 11 ad 5 ad 4; erit pondus E ad D-C, vt 5 ad 4; ſed per conuerſionem rationis, indèque conuertendo, erit F-A ad E, vt 1 ad 5; ſed rationes ponderum E ad B ad A, rectarum nimirum B G ad G E, & A C ad B C ſunt deinceps vt 5 ad 11 ad 6; ergo ex æquali A F ad F E erit vt 1 ad 6.

Similiter, quia F D ad G F, hoc eſt graue G ad D, componitur ex rationibus grauium G ad B ad C ad D, rectarum videlicet E B ad E G; A C ad A B; E D ad E C; ſeu ex rationibus 16 ad 11 ad 5 ad 9; erit F D ad G F, vt 16 ad 9; at diuidendo erit D G ad G F, vt 7 ad 9.

X. Quod ſi denique dentur tres rationes A F ad F E, vt 4 ad 5; E G ad G B, vt 11 ad 5; & C B ad B A, vt 5 ad 6; eodem ratiocinio manifeſtabimus C D ad D E, vt 1 ad 6; & F G ad G D, vt 7 ad 9, quæ &c.

PROP. XIII. THEOR. IV.

Expoſita eiuſdem tertij elementi figura iungantur inſuper duæ lineæ A D, F C. Dico G D ad G F eſſe vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum E A D, & altitudo B C ad pyramidem, cuius baſis triangulum C E F, atq; altitudo A B.

QVoniam D G ad G F, pondus nimirum F ad D componitur ex rationibus F ad A ad C ad D, rectarum ſcilicet A E ad E F; C B ad B A; E D ad E C, vel ex iiſdem perturbatè, hoc eſt ex rationibus A E ad E F; E D ad E C; & C B ad B A; ex prioribus autem duabus componitur triangulum A E D ad triangulum C F E (quòd angulus ad E communis ſit) erit D G ad G F compoſita ex rationibus trianguli A E D ad E F C, & rectæ C B ad B A; hoc eſt D G ad G F eſt, vt pyramis, cuius baſis triangulum A E D, altitudoque B C, ad pyramidem, cuius baſis triangulum E F C, & altitudo A B, quod eſt &c. *tab. 2. fig. 16.*

COROLLARIVM.

Conſtat, ſi C B fuerit æqualis ipſi A B, eſſe G D ad G F, vt triangulum E A D ad triangulum C F E.

PROP. XIV. THEOR. V.

Iiſdem manentibus dico C B ad B A eſſe, vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum F E C, & altitudo G D ad pyramidem, cuius baſis triangulum A E D, altitudo verò G F.

REcta C B ad B A, pondus videlicet A ad C, componitur ex rationibus ponderum A ad F ad D ad C, rectarum videlicet E F ad E A, G D ad G F, & E C ad E D, ſeu ex ijſdem perturbatè ſumptis, hoc eſt ex rationibus E F ad E A, E C ad E D, & G D ad G F; ſed ex prioribus duabus componitur ratio trianguli F E C ad triangulum D E A, vt diximus in antecedenti theoremate; ergo C B ad B A componitur ex rationibus trianguli F E C ad triangulum D E A, & rectæ G D ad G F; hoc eſt C B ad B A eſt vt pyramis, cuius baſis triangulum F E C, & altitudo G D ad pyramidem, cuius baſis triangulum D E A, & altitudo G F.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt, quod, ſi G D fuerit æqualis ipſi G F, habebit C B ad B A eandem rationem, quam habet triangulum C E F ad triangulum A E D.

PROP. XV. THEOR. VI.

Expoſita figura tertij elementi ducantur inſuper duæ lineæ A G, B F, oſtendendum eſt G D ad D F eſſe, vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum A E G, & altitudo B C ad pyramidem, cuius eſt baſis triangulum F E B, & altitudo A C.

tab. 2. fig. 17. QVoniam D G ad F D, pondus nimirum F ad G componitur ex rationibus grauium F ad A ad B ad G, rectarũ videlicet A E ad E F, C B ad C A, & E G ad E B; ex his verò rationibus perturbatè ſumptis, videlicet A E ad E F, E G ad E B, & C B ad C A, componitur quoq; ratio pyramidis, cuius baſis triangulum A E G, & altitudo C B ad pyramidem, cuius baſis triangulum F E B, & altitudo C A; erit D G ad F D, vt dicta pyramis altitudinis C B ad aliam pyramidem altitudinis C A, quod erat &c.

PROP.

PROP. XVI. THEOR. VII.

Iiſdem poſitis dico B C ad C A eſſe, vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum F E B, altitudo G D ad pyramidem, cuius baſis triangulum E A G, & altitudo F D.

COmponitur ratio C B ad C A, ponderis videlicet A ad B, ex rationibus ponderum A ad F ad G ad B, rectarum videlicet E F ad E A, D G ad D F, & E B ad E G, & ex ijſdem etiam perturbatè ſumptis, hoc eſt ex E F ad E A, E B ad E G, & D G ad D F; triangulum autem F E B ad triangulum A E G componitur ex rationibus F E ad E A, & E B ad E G (cum angulus A E B communis ſit) ergo B C ad C A erit vt pyramis, cuius baſis triangulum F E B, altitudo G D, ad pyramidem, cuius baſis triangulum A E G, & altitudo D F, quod erat &c.

PROP. XVII. PROB. X.

Expoſita quarti elementi figura, ex quinque verò rationibus de quibus in eodem elemento egimus, habitis tribus quibuſcunque inſtitutum eſt reliquas duas inueſtigare.

HAbet hoc problema decem caſus, veluti antecedens. tab. 2. fig. 18.

I. Sint datæ tres rationes E D ad D C, vt 5 ad 4, G D ad D B, vt 6 ad 7, & F D ad D A, vt 1 ad 3 (in hoc tantùm primo caſu non debent eſſe inter ſe parallelæ duæ rectæ A C, E F) oportet igitur duas reliquas rationes indagare, hoc eſt A B ad B C, & E G ad G F.

Cum igitur A C, E F parallelæ non ſint, productæ conuenient, vt in H; itaque quia in figura A C H F E D primi elementi, cognitæ ſunt duæ rationes E D ad D C, vt 5 ad 4, A D ad D F, vt 3 ad 1; manifeſtabimus etiam (ex primo caſu ſexti problematis) duas reliquas rationes, eritque E F ad F H, vt 1 1 ad 16; A C verò ad A H, vt 11 ad 20. Rurſus in alia figura G F H B A D eiuſdem elementi habentur duæ rationes A D ad D F, vt 3 ad 1; B D ad D G, vt 7 ad 6; ergo, vt ſupra, dabimus reliquas duas, videlicet H F ad F G, vt 28 ad 11, & H A ad A B, vt 24 ad 11. Verùm quia C A ad A B com-

componitur ex rationibus A C ad A H ad A B, numerorum videlicet 11 ad 20, & 24 ad 11, ex quibus componitur ratio 66 ad 55; erit CA ad AB, vt 66 ad 55, & diuidendo, CB ad BA, vt 11 ad 55, imò vt 1 ad 5. Similiter quia E F ad F G componitur ex rationibus rectarum E F ad F H ad F G, videlicet numerorum 11 ad 16, & 28 ad 11, ex quibus fit ratio 11 ad 6 $\frac{2}{7}$, immò 77 ad 44; erit diuidendo E G ad G F, vt 33 ad 44, ſeu vt 3 ad 4.

II. Sit dicta figura quarti elementi quomodolibet ſuppoſita, habitiſque tribus rationibus A B ad B C, vt 5 ad 1, B D ad D G, vt 7 ad 6, & E G ad G F, vt 3 ad 4, oporteat reliquas duas rationes indagare, nimirum E D ad D C, & F D ad D A. Componitur recta F D ad D A, pondus nempè A ad F, ex rationibus ponderum A ad B ad G ad F, rectarum videlicet C B ad C A, G D ad D B, & E F ad E G, imò ex rationibus 1 ad 6 ad 7 ad 3; quarè F D ad D A eſt, vt 1 ad 3. Eadem ratione quia E D ad D C, hoc eſt graue C ad E componitur ex rationibus grauium C ad B ad G ad E, rectarum nempè A B ad A C, G D ad D B, & E F ad G F; imò ex rationibus 5 ad 6 ad 7 ad 4; erit E D ad D C, vt 5 ad 4.

III. Cognitis tribus rationibus A D ad D F, vt 3 ad 1, F G ad G E, vt 4 ad 3, & E D ad D C, vt 5 ad 4, ſi ſuſpendamus grauia iuxta tres illas notas rationes, conſequemur duas reliquas A B ad B C, vt 5 ad 1, & G D ad D B, vt 6 ad 7.

IV. Idem fiet ſi tres rationes fuerint E D ad D C, vt 3 ad 1; C B ad B A, vt 4 ad 3, & A D ad D F, vt 5 ad 4, reperiemus enim E G ad G F, vt 5 ad 1, & B D ad G D, vt 6 ad 7.

tab.1. fig.19. V. Habeantur tres rationes F G ad G E, vt 4 ad 3, E D ad D C, vt 5 ad 4, & C B ad B A, vt 1 ad 5; debemus reperire reliquas duas B D ad D G, & F D ad D A, quod (nè obliuiſcamur methodi, qua vſi ſumus ab initio) ſic præſtabimus. Fiat vt 3 ad 4, hoc eſt vt recta G E ad F G, ita pondus F 3 ad pondus E 4; atque vt C D ad D E, hoc eſt vt 4 ad 5, ita pondus E 4 ad pondus C 5; & denique vt A B ad B C, hoc eſt vt 5 ad 1, ita pondus C 5 ad pondus A 1. Quoniam punctum B eſt centrum grauitatis grauium A 1, C 5; Itemque G centrum grauitatis ponderum E 4, F 3 erit in libra G D B centrum grauitatis omnium grauium A 1, C 5, E 4, F 3; eſt autem D centrum grauitatis duorum grauium E 4, C 5; ergo ſi poſſibile eſt vt ponamus aliquod aliud punctum h, vt centrum grauium A 1, F 3, erit in recta D H, puta in I centrum grauitatis omnium grauium, & ideo (vt prius oſtenſum eſt) non foret in libra B D G, quia vnicum eſt, quod cum fieri nequeat debet idem punctum D eſſe centrum grauitatis omnium grauium, itemque grauium A 1, F 3, & grauium E 4, C 5; propterea vt B 6 ad G 7, ita recta G D ad D B, vtq; A 1 ad F 3, ita F D ad D A.

VI. Quod ſi tres cognitæ rationes ſint E G ad G F, vt 4 ad 3; F D ad D A, vt 5 ad 4; & A B ad B C, vt 1 ad 5, eadem ratione cognoſcemus reliquas duas G B ad D B, vt 6 ad 7; & E D ad D C, vt 1 ad 3.

VII. Habitis tribus rationibus E D ad D C, vt 1 ad 2, A B ad B C æqualitatis, & G D ad D B, vt 1 ad 3, oporteat reliquas duas inueſtigare, E G ſcilicet ad G F, & A D ad D F. Componitur G F ad F E, pondus ſcilicet E ad G, ex rationibus grauium E ad C ad B ad G, rectarum videlicet C D ad C E; A B ad A C; & G D ad D B; imò ex rationibus numerorum 2 ad 1 ad 2 ad 6, quare G F ad F E eſt vt 2 ad 6, conuertendo autem, indeque diuidendo, erit E G ad G F, vt 2 ad 1. Rurſus quia D F ad D A, pondus videlicet A ad F componitur ex rationibus grauium A ad C ad E ad F, rectarum videlicet C B ad B A; E D ad D C; & F G ad G E, ſeu ex rationibus 1 ad 1 ad 2 ad 4; erit D F ad F A, vt 1 ad 4. *tab.1. fig.7.*

Alios verò tres caſus eodem modo oſtendemus; etenim huic ſeptimo ſunt ſimiles. Conſtat igitur totum problema.

COROLLARIVM.

Quod ſi angulus A D C intelligatur ſupra angulum E D F, linea A D in lineam E D; B D in D G, & C D in D F cadet; linea verò A B C lineas E D, G D, F D ſecabit, ex quo fiet, vt figura elementi quarti tranſeat in illam tertij, & viceuerſa hæc in illam, ſi in priſtinam poſitionem angulus ille reſtituatur; quare ſi in figura elementi quarti pro rationibus E D ad D C, F D ad D A, ſumantur duæ E D ad D A, & F D ad D C; inde tres qualibet, vt diximus, datæ ſint rationes reliquas quoque duas notificabimus; idemque præſtabimus in figura tertij elementi commutatis rationibus A E ad E F, C D ad D E in rationes A E ad E D, & C E ad E F.

PROP. XVIII. THEOR. VIII.

Poſita eadem elementi quarti figura ducantur inſuper lineæ E A, F C, dico G F ad G E, eſſe vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum F D C, altitudo verò A B ad pyramidem, cuius baſis triangulum A D E, & altitudo C B.

tab.2. fig.20. COmponitur proportio rectæ G F ad G E, illa nempe ponderis E ad F ex rationibus grauium E ad C ad A ad F, rectarum videlicet C D ad D E, A B ad B C, & F D ad D A, vel ex iiſdem perturbatè acceptis, nempe ex C D ad D E, F D ad D A, & A B ad B C, hoc eſt ex rationibus trianguli F D C ad triangulum E D A, & ex recta A B ad B C; ſed ex iiſdem rationibus componitur pyramis, cuius baſis triangulum F D C, altitudo verò A B ad pyramidem, cuius baſis triangulum A D E, & altitudo B C; ergo vt prior pyramis ad hanc, ita G F ad G E, quod &c.

COROLLARIVM.

Patet, ſi recta A B æqualis ſit rectæ B C, eſſe triangulum F D C ad triangulum A D E, vt recta G F ad G E.

PROP. XIX. THEOR. IX.

Expoſita eadem figura quarti elementi ducamus inſuper duas lineas E B, G C. Dico G F ad F E eſſe, vt eſt pyramis, cuius baſis triangulum C D G, & altitudo A B, ad pyramidem, cuius baſis triangulum B D E, & altitudo A C.

tab.2. fig.21. COmponitur ratio G F ad F E, ponderis videlicet E ad G, ex rationibus grauium E ad C ad B ad G, rectarum videlicet C D ad D E, A B ad A C, & G D ad D B; vel ex iiſdem perturbatè acceptis, nempe ex rationibus C D ad D E, G D ad D B, A B ad A C, hoc eſt ex triangulo C D G ad triangulum E D B; & ex recta A B ad A C; ex his verò rationibus componitur ratio pyramidis, cuius baſis triangulum C D G, altitudo A B, ad pyramidem, cuius baſis triangulum E D B, & altitudo A C; ergo vt illa ad iſtam pyramidem, ita G F ad F E, quod &c.

PROP. XX. PROB. XI.

Expoſita quinti elementi figura, & ex ſex rationibus, de quibus in eodem elemento egimus datis tribus quibuſcunque reliquas duas inuenire.

PRoblema hoc habet viginti caſus; nam multiplicato 6 in 5 fit 30, ex cuius dimidio 15 ducto in 4 fit 60; huius tertia pars eſt 20, numerus ſcilicet omnium ternariorum prouenientium ex numero 6.

I. Sint datæ tres rationes C D ad D E, vt 12 ad 8, E F ad F G, vt 4 ad 12, & G H ad H A, vt 8 ad 4; debemus reliquas tres inueſtigare. Vt factum eſt in elemento quinto ſuſpendamus ex angulis C E G A grauia C E G A, ita vt pondera ſint inter ſe reciprocè, vt ſunt longitudines ex quibus pendent; Itaque ſi C ponderabit vt 4, ponderabit E vt 6, quia E D ad D C eſt, vt 8 ad 12, vel 4 ad 6. Eadem rationem exiſtente E vt 6, erit G vt 2; nam G F ad F E eſt vt 12 ad 4, ſeu 6 ad 2; & denique ſi G fuerit 2 erit A 4; eſt enim A H ad H G, vt 4 ad 8, imò vt 2 ad 4; quare C erit 4, E 6, G 2, & A 4; eſt verò (vtpotè figura elementi quinti) A B ad B C, vt pondus C 4 ad pondus A 4; ergo A B ad B C erit vt 4 ad 4, videlicet æqualitatis; deindè H I ad I D, vt pondus D 10 ad pondus H 6, hoc eſt vt 10 ad 6; & pariter B I ad I F, vt graue F 8 ad B 8, nempe vt 8 ad 8, ſeu æqualitatis, & ideo manifeſtauimus tres reliquas rationes A B ad B C æqualitatis, quemadmodum B I ad I F, & H I ad I D, vt 10 ad 6, vel 5 ad 3. tab.2. fig.22.

II. III. IV. Si verò tres datæ rationes fuerint E F ad F G; G H ad H A; A B ad B C: vel G H ad H A; A B ad B C, & C D ad D E: vel A B ad B C; C D ad D E; E F ad F G, eodem modo, vt ſupra, abſoluemus problema.

V. Sint datæ tres rationes A B ad B C, vt 5 ad 6; B I ad I F æqualitatis; & G F ad F E, vt 8 ad 3; oporteatq; reliquas notificare. Suſpendamus ex angulis grauia C E G A, vt docet elementum quintum, erit ergo vt A B ad B C, hoc eſt vt 5 ad 6, ita graue C ad A: ſi igitur C pendit 5, A pendet 6. Deindè quia vt F I ad I B, ideſt, vt 1 ad 1, ita pondus B 11 ad F, erit F quoque 11; eſt autem G F ad F E, vt 8 ad 3; & componendo G E ad F E, vt 11 ad 3, in qua proportione eſt etiam pondus F ad G; ergo cum F pendat 11, pendet G 3, & reliquum pondus E 8; itaque ſtatim habentur reliquæ, hoc eſt H I ad I D, vt pondus D 13 ad pondus H 9; itemque A H ad H G, vt graue G 3 ad graue A 6, & denique C D ad D E, vt graue E 8 ad graue C 5.

VI. Quod ſi tres datæ rationes fuerint eædem quas modò manifeſtauimus, dabimus reliquas tres eodem modo.

VII. Dentur tres rationes G F ad F E, vt 6 ad 5, H I ad I D, vt 13 ad 9, & F I ad I B, vt 11 ad 11, videlicet æqualitatis, debemus reliquas etiam inueſtigare. Quoniam vt G F ad F E, ita pondus E ad G; eſt verò G F ad F E, vt 6 ad 5; ſi ergo ponatur pondus E eſſe 6, erit G 5; deindè quia vt B I ad I F, imò vt 11 ad 11, ita F pondus ad B; eſtque F 11, ergo B erit pariter 11, quare pondus I erit 22; eſt autem H I ad I D, vt 13 ad 9; ergo componendo H D ad D I, hoc eſt pondus I ad H, erit vt 22 ad 9; & ideò cum pondus I ſit 22, erit graue H 9; eſt autem pondus I 22 æquale põderibus H 9, & D, igitur D erit 13; ſimiliter quia H 9 eſt ęquale duobus ponderibus G 5, & A; & D 13 æquale duobus ponderibus E 6, & C, erit A 4, & C 7; eritque propterea A B ad B C, vt pondus C 7 ad pondus A 4, G H ad H A, vt pondus A 4 ad pondus G 5., & denique E D ad D C, vt pondus C 7 ad E 6.

VIII. IX. X. Si verò tres datæ rationes fuerint A B ad B C, H I ad I D, B I ad I F: vel tres C D ad D E, B I ad I F, & D I ad I H: aut tres G H ad H A, F I ad I B, & H I ad I D; eodem ratiocinio problemati ſatisfaciemus.

XI. Sint vlterius datæ tres aliæ rationes G H ad H A, vt 5 ad 17, F I ad I B, vt 7 ad 16, & G F ad F E, vt 15 ad 17, oportet reliquas tres indagare.

Quia, vt G H ad H A, hoc eſt vt 5 ad 17, ita pondus A ad G, ſi graue A ſit 5, graue G erit 17. Item cum E F ad F G, hoc eſt 17 ad 15, ſit vt pondus G ad E, & pondus G ſit 17, pondus E erit 15; & denique, quia B I ad I F, hoc eſt 16 ad 7; vel 32 ad 14 eſt vt pondus F ad B, cumque F ſit 32, erit B 14; ſed B 14 eſt pondus grauium A 5, & C; ergo C erit 9, atque adeò C D ad D E erit vt pondus E 15 ad pondus C 9; ſimiliter A B ad B C erit vt C 9 ad A 5; & deniquè H I ad I D erit vt D 24 ad H 22.

XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. Septem alij caſus huic prædicto ſimiles eodem modo ſoluuntur.

XIX.

tab. 2. fig. 23. XIX. Sint datæ rationes G F ad F E, vt 8 ad 9, H I ad I D, vt 15 ad 19, & A B ad B C, vt 7 ad 10.

Cauendum tamen eſt, ſi tres G E, H D, A C, fuerint parallelæ, ne aliæ tres G A, F B, E C ſint æquidiſtantes.

HVnc caſum reſoluemus algebricè per ſecundas radices hoc pacto.

Quoniam vt G F ad F E, ita pondus E ad G, ſi ponatur E ℞ 1, erit G ℞ 1 $\frac{1}{8}$. Item quia A B ad B C, eſt vt pondus C ad A, ſi voluerimus vt C pendat A 1, A pendet A 1 $\frac{3}{7}$, & quia H I ad I D eſt vt pondus D ad H, ponitur verò D vt 15, erit H vt 19, verùm quia 19, pondus nimirum H æquatur duobus ponderibus G A, hoc eſt ℞ 1 $\frac{1}{8}$ + A 1 $\frac{3}{7}$; & D æquale eſt duobus C E, hoc eſt 15, nimirũ ℞ 1 + 1 A; erit vt 19 ad 15, ita ℞ 1 $\frac{1}{8}$ + A 1 $\frac{3}{7}$ ad ℞ 1 + 1 A; quare productum ex medijs, æquale erit ei quod ex extremis, nempe ℞ 19 + 19 A æquale erit ℞ 16 $\frac{7}{8}$ + A 21 $\frac{3}{7}$; ablatiſq; communiter ℞ 16 $\frac{7}{8}$ + 19 A relinquetur æquatio inter ℞ 2 $\frac{1}{8}$, & A 2 $\frac{3}{7}$; & ſi fiat vt A 2 $\frac{3}{7}$ ad ℞ 2 $\frac{1}{8}$, ita A 1 ad alium numerum prodibit ℞ $\frac{119}{136}$, pretiũ vnius A, & idcircò ℞ 1 $\frac{119}{136}$, hoc eſt ℞ $\frac{255}{136}$ æqualis erit numero abſoluto 15, aggregato vid. duorum grauium C E, hoc eſt ℞ 1 + A 1. Diuiſo igitur 15 per fractionem $\frac{255}{136}$ exit abſolutus numerus $\frac{2040}{255}$, hoc eſt 8 pretium vnius radicis, & propterea graue E, quod ponebatur ℞ 1, erit 8; & G ℞ $\frac{1}{8}$ erit 9. Deinde quia (vt diximus ſuperius) põdus D ęquatur duobus E C, hoc eſt 15, erit E 8, & C 7, quarè A 1 eſt 7; igitur A nimirùm A 1 $\frac{3}{7}$ erit 10: quod cum ita ſit, erit G H ad H A, vt pondus A 10 ad pondus G 9; C D verò ad D E, vt pondus E 8 ad pondus C 7; & denique F I ad I B, vt B 17 ad pondus F 17, quod erat &c.

XX. vltimò. Si datæ rationes fuerint G H ad H A, F I ad I B, & E D ad D C, ſuppoſita figura, vt dictum eſt, erit hic caſus ſimilis præcedenti XIX., atque adeo tres reliquas, ſimili artificio, aperiemus.

PROP.

PROP. XXI. THEOR. X.

Expoſita ſecundi elementi figura iungatur inſuper D B, quæ ſecet A K in L. Dico B L ad L D eſſe vt pondus D ad B; K L verò ad L A vt duplum ponderis G ad pondus K.

tab. 2. fig. 24. INtelligantur in A ſuſpenſa duo pondera G. Quoniam D eſt centrum duorum grauium I G, itemque B centrum duorum H G, erit in libra D B centrum grauitatis omnium grauium I G G H. Pariter quia K eſt centrum duorum grauium I H, & in A eſt duplum ponderis grauis G; erit in libra A K centrum omnium grauium I H G G; quod cum vnicum ſit, in communi ſectione L librarum D B K A exiſtet, & ideo vt B L ad L D, ita pondus D ad pondus B; atq; vt A L ad L K, ita pondus K ad duplum G, quod &c.

PROP. XXII. THEOR. XI.

Duæ lineæ A B, B C comprehendentes angulum B ſecent alias duas lineas A D, D C comprehendentes angulum D, ſecent, inquam, in punctis A C, ſintque lineæ C B, B A, A D, D C ita diuiſæ in punctis F G H E, vt ratio D E ad E C componatur ex rationibus B F ad F C, A G ad G B, & D H ad H A. Dico iunctas H F, G E ſe inuicem ſecare, puta in I, ideoque in vno plano exiſtere: hoc autem vt conſtet, ſuſpendere oportebit ex punctis A B C D grauia L M N K, ita vt G I ad I E ſit vt duo grauia K N ad duo L M; & H I ad I F, vt duo M N ad duo L K, quod ſic præſtabimus.

tab. 3. fig. 25. 26. 27. FIat vt B F ad F C, ita graue N ad M; vt A G ad G B, ita M ad L; & vt D H ad H A, ita L ad K. Pondus N ad K componitur ex rationibus grauium N ad M ad L ad K, videlicet ex rationibus rectarum B F ad F C, A G ad G B, & D H ad H A; ex iiſdem verò componitur D E ad E C; ergo vt D E ad E C, ita N ad K. Cum igitur E ſit centrum libræ C D, hoc eſt grauium N K; & G centrum grauium L M, erit in libra G E centrum omnium grauium K N L M; eademque ratione cum H ſit centrum grauium L K, & F ſit centrum grauium M N, erit item in libra H F centrum omnium grauium L K M N in eadem priori poſitione, quod cum vnicum ſit, neceſſe eſt, vt libræ, ſeu lineæ G E, H F ſe inuicem ſecent, vt in I, eritque hoc centrum vtriuſque libræ, & propterea vt H I ad I F, ita duo grauia M N ad duo L K; ſimiliter vt recta G I ad I E, ita duo grauia K N ad duo grauia L K, quod &c.

PROP. XXIII. THEOR. XII.

Sit pyramis, cuius vertex G, baſis autem triangulum A E C; & deſcripta in triangulo E G C ſecundi elementi figura, qualis eſt E I G L C D K, iungamus duas lineas A I, A L; ſumpto autem in A G quolibet puncto N, ducamus N E ſecantem A I in H, & N C ſecantem A L in M; actiſque inſuper lineis G H F, G M B, intelligamus iunctas eſſe C F, A D, E B. Dico prius has lineas in eodem puncto veluti P ſeſe inuicem ſecare; prætereà conceptis intra pyramidem lineis A K, E M, C H, G P, F L, I B, N D, has quoque ſibi ipſis in eodem ſimul puncto O occurrere.

Vt autem hæc liquidò conſtent ſuſpendemus de more ex angulis eiuſdem pyramidis in ratione reciproca longitudinum grauia R S Q T; quo poſito tria quælibet ad reliquum, vel duo quæuis ad reliqua, ſiue duo quælibet ad vnum, aut tandem vnum ad vnum erunt inter ſeſe reciprocè mira quadam concordia, vt longitudines ex quibus pendent.

FIat vt G I ad I E, ita pondus S ad Q, vt C L ad L G, ita pondus Q ad T, atque vt A N ad N G, ita pondus Q ad R; ſitque R in A, S in E, T in C, & Q in G; quia in elemento ſecundo cuius grauia S Q T, & centrum K, eſt G I ad I E, vt pondus S ad Q, C L verò ad L G, vt Q ad T, erit ex prob. 2. Etiam C D ad D E, vt S ad T, eademque ratione in elemento ſecundo, cuius grauia ſunt R Q S, erit E F ad F A, vt R ad S. Pariter in elemento ſecundo, cuius grauia R Q T, & centrum M erit recta A B ad B C, vt pondus T ad R; igitur cum E F ad F A ſit vt R ad S, C D ad D E, vt S ad T, & A B ad B C, vt T ad R; lineæ E B, A D, C F ſecabunt ſeſe in eodem puncto veluti P: fiet autem ex ipſis vnà cum triangulo A E C elementum ſecundum, cuius grauia R S T, & centrum P; quare in linea G P erit centrum grauitatis omnium grauium R S T Q; & pariter quia H eſt centrum grauitatis grauium R S Q; K grauium S Q T, & M grauium R Q T, erit idem centrum grauium R S T Q in-

tab. 3. fig. 28.

vnaquaque librarum AK, EM, CH; at quia vnicum illud eſt, lineæ GP, AK, EM, CH occurrent ſibi ipſis in eodem puncto O, nempe in centro grauitatis grauium omnium RSTQ. Deinde quia L eſt centrum grauitatis grauium QT, & F grauium RS, erit in libra FL punctum O, vtpotè centrum grauitatis grauium RSTQ: idem dic de libris IB, DN; omnes igitur libræ, ſeu lineæ GP, AK, EM, CH, FL, IB, DN, ſibi ipſis in eodem puncto O communi centro occurrent; & ideò vt CO ad OH, ita tria grauia RQS, hoc eſt pondus H ad C; vt EO ad OM, ita pondus M, tria videlicet grauia RQT ad S; vt AO ad OK, ita pondus K, grauia videlicet SQT ad R; & vt OG ad OP, ita pondus P, ſeu grauia STR ad Q; item vt pondus L ad F, hoc eſt grauia QT ad RS, ita FO ad OL; vt pondus N ad D, grauia nempè RQ ad ST, ita DO ad ON; & vt pondus I ad B, grauia nimirum QS ad RT, ita BO ad OI. Reliquæ verò rationes ex ſecundis elementis, quorum centra HMKP innoteſcunt, & ideò totum propoſitum manifeſtũ eſt.

PROP. XXIV. THEOR. XIII.

Sit pyramis, cuius vertex E, & baſis quodlibet quadrilaterum CBAD; ductiſque intra triangulum BEC, tribus rectis ſe inuicem ſecantibus in eodem puncto N, vt ſunt lineæ BNK, CNO, ENP, adeò vt fiat figura ſecundi elementi; iungantur AO, DK, & in triangulis BEA, CED perficiantur duæ figuræ eiuſdem elementi BOEFARQ, & CKEGDML; iunctis verò lineis AG, DF ſecantibus ſeſe in H producatur EH in I, & iungantur duæ lineæ IP, RM, vt ſibi ipſis occurrant in puncto S. Demùm intelligantur intra pyramidem lineæ ES, QM, HP, LR, NI; dico has ſecari in eodem puncto veluti T. Vt autem hoc demonſtremus ſuſpendemus, vt factum eſt in præcedenti, ex angulis eiuſdem pyramidis quinque pondera ✠VXZ℞, quorum duo quælibet ad reliqua; vel duo ad duo, aut duo ad vnum, ſiue vnum ad vnum, vel vnum ad quatuor erunt reciprocè inter ſe, vt longitudines earum librarum ex quibus pendent.

tab. 3. fig. 29. FIat vt DG ad GE, ita pondus ℞ ad ✠, vt CK ad KE, ita ℞ ad Z; atque vt AF ad FE, ita ℞ ad V. Iam quia in quatuor ſingulis figuris elementi ſecundi, quas in ſuperficie pyramidis, baſi excepta, conſtruximus, tria pondera adaptauimus iuxta leges ſecundi elementi, erit BR ad RA, vt pondus V ad ✠; CP ad PB, vt ✠ ad Z, & DM ad MC, vt Z ad X. Quare cum DI ad IA, hoc eſt pondus V ad X componatur ex rationibus ponderum V ad ✠ ad Z ad X, rectarum videlicet BR ad RA, CP ad PB, & DM ad MC, erit ARBPCMDIAS figura elementi quinti, cuius grauia V✠ZX; itaque cum in S ſit centrum illorum, & in E ſit graue ℞, erit in linea ES centrum grauitatis omnium grauium V✠ZX℞. Rurſus quia in R eſt centrum grauium V✠, atque in L centrum grauium ℞ZX, erit item in libra RL centrum omnium grauium V✠ZX℞ in eadem priori poſitione, quod cum vnicum ſit, exiſtatque eadem ratione in libris pariter NIQMHP, neceſſe eſt, vt ad inuicem ſecentur omnes dictæ lineæ ES, LR, NI, QM, HP, in eodem puncto, veluti T, quod cum ſit ſimul centrum earundem librarum, conſtat RT ad TL eſſe vt tria grauia Z℞X ad duo V✠; IT ad TN, vt tria grauia ✠℞Z ad duo VX; MT ad TQ, vt tria ✠V℞ ad duo ZX; HT ad TP, vt duo ✠Z ad tria V℞X; & demùm ET ad TS, vt quatuor V✠ZX ad ℞; Reliquæ verò rationes ex elementis ſecundo, & quinto manifeſtæ ſunt; patet ergo propoſitum.

PROP. XXV. THEOR. XIV.

Sit pyramis, cuius vertex M, baſis autem triangulum AEC, & ducta ✠H, quæ ſecet EM in ✠, atque AM in H, ab eodem quomodolibet aſſumpto puncto K iungamus duas lineas KH, K✠; linea verò MF ſecet H✠ in G; item MB ſecet HK in I, & MD ſecet K✠ in L; iunctiſque FB, AD ſibi occurrentibus in O, agantur rectæ HL, IG, MO. Dico has ſe inuicem ſecare, vt in ℞; grauia verò ſuſpenſa ex angulis ſeruabunt, vt in præcedentibus, illam concordiam rationum.

FIat vt CB ad BA, ita pondus P ad Q, vt autem ED ad DC, ita Q ad R, vt verò AF ad FE, ita R ad S; quo poſito punctum O erit centrum grauitatis ponderum SPQR. Deindè vt MK ad KC, ita fiat pondus Q ad V, & vt M✠ ad ✠E, ita R ad X; eritq; ſimiliter punctum L centrum grauitatis grauium RQVX; Demùm vt MH ad HA, ita ponatur pondus S ad Z, & P ad T, & erit G pariter centrum grauitatis grauium RXZS, I verò grauium PTVQ & H grauium SZTP; Quamobrem perſpicuum eſt in vnaquaque librarum HL, IG, MO exiſtere centrum grauitatis grauium omnium ſuſpenſorum, quod cum vnicum ſit, neceſſe *tab. 3. fig. 30.*

eſt vt ſe inuicem in eodem puncto veluti R ſecent; eſt autem huiuſmodi centrum illud etiam earundem librarum; ergo conſtat propoſitum.

PROP. XXVI. THEOR. XV.

Sit pyramis, cuius vertex H, & baſis triangulum A E C; productis verò planis triangulorum A H E, E H C, C H A vltra punctum H ſecentur hæc alio plano; ſintque horum planorum communes ſectiones lineæ A H I, C H N, E H L, N L, N I, I L; & conſtructa in baſi propoſitæ pyramidis figura elementi ſecundi A F E D C B G, iungantur lineæ F H, D H, B H, quæ productæ occurrent lateribus oppoſiti trianguli; itaque occurrant in punctis deinceps K M O, & iungantur lineæ N K, I M, L O; Dico has in eadem puncto P ſe inuicem ſecare, & inſuper, ſi iuncta G H producatur, occurrere triangulo oppoſito, in prædicto puncto P. Hoc verò, vt manifeſtum fiat ſuſpendemus ex angulis duorum triangulorum N L I, A E C in ratione reciproca longitudinum, pondera Q S R X V T, quæ ita ſibi inuicem pulcherrime reſpondebunt, vt vnum ad vnum, vel duo ad vnum, aut duo ad duo, vel tria ad tria, ſint inter ſeſe, vt ſunt reciprocè longitudines ex quibus pendent.

tab. 3. fig. 31. FIat vt E D ad D C, ita pondus R ad S; vt A F ad F E, ita S ad Q: vt N H ad H C, ita R ad X; vt L H ad H E, ita S ad V; & vt I H ad H A, ita Q ad T; ſit autem R in C, S in E, Q in A, T in I, V in L, & X in N; Quoniam igitur E D ad D C eſt vt R ad S, & A F ad F E, vt S ad Q, erit G centrum grauium Q S R, & B centrum ipſorum Q R. Et quia I H ad H A eſt, vt Q ad T; A B ad B C, vt R ad Q (cum B ſit centrum grauium Q R) & N H ad H C, vt R ad X, erit, ex quarto problemate, punctum O centrum grauium X T. Eadem ratione quia F eſt centtum grauitatis grauium Q S, H grauium Q T, & S V, erit K centrum grauium V T. Pariter cum D ſit centrum grauium S R; H verò R X, & S V, erit M centrum grauium X V, & propterea iunctæ lineæ N K, I M, L O in eodem puncto P ſe inuicem ſecabunt, eritque illud centrum grauium X V T; eſt autem punctum H centrum grauium S V, R X, Q T, *ex lem. 1.* omnium videlicet S V R X Q T, & G centrũ grauiũ Q S R, producta igitur libra G H tranſibit per P centrum reliquorum grauium X V T; eritq; G H ad H P, vt tria grauia X V T ad tria Q S R, & ſic de alijs enunciatis rationibus.

STATICÆ CONSTRVCTIONIS

LIBER SECVNDVS.

LEMMA I.

Si qualibet figura rectilinea, circulo, vel ellipſi, ita fuerit circumſcripta, vt ſingula eius latera prædictum circulum, aut ellipſim tangant; ſic ipſa latera per contactus diuidentur, vt ratio partium vnius, ex rationibus partium ſimiliter ſumptarum reliquorum deinceps laterum componatur.

tab. 4. fig. 32. 33. 34. SIT circa circulum, vel ellipſim B D F, triangulum E C A, vel quadrilaterum A C E G; ſeu quodlibet aliud polygonum; puncta verò contactus ſint B D F +. Oſtendendum eſt C D ad D E, in triangulo componi ex rationibus A F ad F E, & C B ad B A; ſed in quadrilatero, ex tribus rationibus G F ad F E, A + ad + G, & C B ad B A.

In circulo tangens D C æqualis eſt C B; B A ipſi A F; & F E ipſi E D; (ſi figura circumſcripta triangulũ ſit) ergo quia C D ad D E cõponitur ex rationibus D C ad C B; C B ad B A; B A ad A F; A F ad F E; F E ad E D; ſi auferantur rationes æqualitatis D C ad C B; B A ad A F; F E ad E D, remanebit compoſita ex duabus tantum rationibus C B ad B A; A F ad F E, vel ex iiſdem perturbatè acceptis; nempe A F ad F E, & C B ad B A. Eadem ratione demonſtrabimus in quadrilatero, quod circumſcriptum eſt circulo, rationem C D ad D E componi ex rationibus G F ad F E; A + ad + G, & C B ad B A: quarè manifeſtum eſt id, quod propoſuimus, quoties triangulum, ſeu quadrilaterum, vel quolibet aliud polygonum fuerit circa circulum.

tab. 4. fig. 35. Sed ſi fuerit circa ellipſim, fieri poteſt, vt cylindrum aliquem inueniamus, cuius eadem propoſita ellipſis ſit ſectio (hoc autem inferius demonſtrabimus) huius itaque cylindri baſis ſit circulus

GLI, dicta verò ellipſis ſit ſectio cylindri, quam indicent literæ FDB, cui circumſcriptum ſit triangulum EAC; à contactibus verò FDB circumſcriptæ figuræ cadant in puncta GIL circumferentiæ, lineæ FG, DL, BI; deindè plana ducamus per EA, FG, AC, BI, & EC, DL, hæc tangent cylindri ſuperficiem ſecundùm lineas FG, DL, BI. Producto demum baſis plano ſint omnes horum planorum communes ſectiones ME, AH, CK; itemque MGH, HIK, KLM. Et quia priora plana ducta ſunt per lineas FG, BI, DL, quæ inter ſeſe ſunt æquidiſtantes, erunt & eorum planorum communes ſectiones, veluti AH, CK, EM inter ſe, & lateribus prædictis FG, BI, DL parallelæ; ideoq; erit AF ad FE, vt HG ad GM, CB ad BA, vt KI ad IH, & CD ad DE, vt KL ad LM; componitur verò, in circulo GLI, ratio KL ad LM ex rationibus HG ad GM, & KI ad IH; ergo etiam CD ad DE componetur ex rationibus AF ad FE, & CB ad BA. Similiter oſtendemus in quadrilatero CBA✠GFED, rationem CD ad DE componi ex rationibus EF ad FG, A✠ ad ✠G; & CB ad BA. Eodem proceſſu vtemur, ſi circumſcripta ſit figura quælibet alia, quod erat &c.

Prop. 19. l. 6. Euclidis reſtituti à Io: Alphonſo Borelio.

Schol. pr. 2. lib. 4. eiuſdem Borelij.

LEMMA II.

Reliquum eſt vt oſtendamus id, quod in ſuperiori lemmate aſſumpſimus; propoſita videlicet qualibet ellipſi, puta FDB✠, cylindrum quendam reperire, ipſumque plano ſic abſcindere, vt facta ſectio, ſimilis, & æqualis ſit propoſitæ ellipſi.

tab. 4. fig. 36.

SIT axis propoſitæ ellipſis linea ✠D, ſecunda verò diameter FB, cui ſumatur æqualis AC, circa quam deſcribatur circulus AC; iam quilibet Cylindrus rectus, non autem Scalenus, ſuper dictum circulum, tanquam baſim conſtitutus, erit quæſitus. Ponamus illum eſſe, cuius parallelogrammum per axem ſit AMGC, & ipſius diagonalis GA maior ſit axe ✠D, latus verò GM ſit minus axe: ergo ſi centro G, interuallo linea GE æquali ✠D, circulus deſcribatur, diuidet eiuſdem circuli circumferentia lineam AM; ſit ideo ſectionis punctum E, & iuncta GE producatur ad partes baſis, vt ſecet AC productam in O, à quo puncto agamus lineam ON in eodem circuli plano perpendicularem

ad OC, perque lineas ON, GEO, ducto plano, fiat in cylindro ſectio GIEH, quæ cum ellipſis ſit; oſtendemus etiam eſſe ſimilem, & æqualem propoſitæ F✠BD. Diuidamus enim rectam EG bifariam in P, per quod vtpote centrum ellipſis tranſeat vſque ad cylindri ſuperficiem ex vtraque parte producta recta IPH parallela NO, erit hæc propterea ordinatim applicata, & ad rectos angulos ad axem EG, & ideo linea IPH dicetur ſecunda diameter, quæ quidem æqualis erit ipſi AC, ſeu FB. Iam ſi concipiamus ellipſim EIGH ſuperpoſitam ellipſi DF✠B, ita vt congruat linea ✠D lineæ GE, congruet etiam linea FB ipſi IH, atque adeò (quod etiam oſtendemus) ellipſis ellipſi coaptabitur, quod &c.

ex Sereno de ſectione cylindri.

ex eodem Sereno.

LEMMA III.

Si, concepta ellipſi ſuper ellipſim, duæ coniugatæ diametri vnius, duabus alterius congruerint; erunt ellipſes prædictæ inter ſe ſimiles, & æquales.

Def. 1. conicor.

tab. 4. fig. 37.

SIT ellipſis FABCE ſuperpoſita ellipſi BACED, quarum coniugatæ diametri AE EC communes ſint. Dico ſectiones iſtas ſibi inuicem congruere; Nam ſi fieri poteſt aſſignetur aliquod punctum veluti F, quod ſit in vna tantùm ellipſi. Ordinatim applicetur ad diametrum EA linea FDG ſecans alteram ellipſim in D, dictamque diametrum in G: indè à puncto E conſtituamus ad rectos angulos ipſi AE rectam EH tertiam proportionalem duarum EA, BC; Erit igitur EH latus rectum, & EA tranſuerſum; verùm quia tam applicata FG, quam DG poteſt idem rectangulum GEH deficiens figura ſimili, & ſimiliter poſita ei quæ lineis AE, EH continetur, erunt dictæ duæ applicatæ, propter ellipticas ſectiones, longitudine etiam inter ſe æquales, totum ſcilicet parti, quod eſt abſurdum; quare non poteſt aſſignari punctum, quod in vtraque ellipſi non exiſtat, atque adeò prædictæ ellipſes ſimiles, & æquales inter ſe erunt, quod &c.

15. l. 1. conic.

PROP. I. THEOR. I.

Si circulo, vel ellipſi fuerit circumſcriptum quodlibet triangulum; rectæ lineæ à contactibus deductæ ad oppoſitos angulos eiuſdem trianguli, ſe inuicem in eodem puncto ſecabunt, & inſurget, ablato circulo, figura illa, quam in ſecundo elemento conſiderauimus.

tab. 4. fig. 38.

SIT circulus, vel ellipſis B F I, circa quam ſit triangulum A G C, contingens prædictam ſectionem in punctis F I B, iunctæq; duæ lineæ A I, C F ſe inuicem ſecent in E; dico quod ſi iungatur G E, & protrahatur, tranſibit per reliquum contactum B. Si enim hoc verum non eſt tranſeat per H; & quia propter elementum ſecundum recta C H ad H A, pondus videlicet A ad C componitur ex rationibus grauium A ad G ad C, hoc eſt rectarum G F ad F A, & C I ad I G; itemque propter conicam ſectionem, recta C B ad B A ex ijſdem duabus rationibus componitur, erit vt C H ad H A, ita C B ad B A, & componendo, C A ad A H, vt C A ad A B; ideoque A H erit æqualis ipſi A B, totum ſcilicet parti, quod eſt abſurdum. Neceſſe eſt igitur, vt iuncta linea G E ſi producatur cadat in contactum B.

lem. 1. 2. huius.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quod, ſi ratio C B ad B A componatur ex rationibus G F ad F A, G I ad I G, & iungantur A I, C F, G B, conuenient in E. Nam ſi exempli gratia G B non tranſeat per E, in quo ſe mutuò ſecant A I, C F, ſi iungatur G E, & producatur, cadet in aliud punctum H. Erit igitur C H ad H A, vt oſtenſum eſt, propter elementum ſecundum, compoſita ex rationibus G F ad F A, & C I ad I G: Quare vt C B ad B A, ita C H ad H A, & componendo, vt C A ad A B, ita C A ad A H, quod eſt abſurdum.

* * *

PROP. II. THEOR. II.

Si circulo, vel ellipſi circumſcriptum fuerit quoddam quadrilaterum, & iungantur oppoſita puncta contactuum, ita vt iungentes lineæ ſe inuicem intra circulum, vel ellipſim ſecent, erit huiuſmodi figura, ablata coni ſectione, illa eadem, quam in quinto elemento conſiderauimus.

tab. 4. fig. 32. 33. 34.

NAM accepta figura lemmatis primi ſi concipiantur ductæ duæ lineæ B F, D✠, manifeſtum eſt propoſitum, quia ibi oſtendimus C D ad D E componi ex rationibus G F ad F E, A✠ ad ✠G, & C B ad B A.

PROP. III. THEOR. III.

Si in triangulo duo latera angulum comprehendentia ſimiliter ſecentur, baſi verò bifariam ſecta, ab angulis ad oppoſita ſectionum puncta lineæ ducantur, iſtæ ſe inuicem in eodem puncto ſecabunt; ita vt figura ex ijſdem lineis compoſita ſit illa ſecundi elementi.

tab. 5. fig. 39.

SIT triangulum A C E, vtque A B ab B C, ita ponatur E D ad D C; baſis verò A E ſit in G bifariam ſecta, & iunctis A D, E B ſecantibus ſe ſe in F, connectamus lineam C F: Dico, hanc productam tranſire per punctum G; quod ſi verum non ſit, incidat ſi fieri poteſt in H; & quia, propter elementum ſecundum, E H ad H A, graue nimirum A ad E componitur ex rationibus grauium A ad C ad E, rectarum videlicet C B ad B A, & E D ad D C; imò rectarum C B ab B A ad B C; erit E H ad H A, vt B C ad B C; & ideo E H æqualis erit ipſi H A: Sed etiam E G eſt æqualis G A; ergo vt E H ad H A, ita E G ad G A; & componendo, vt E A ad A H, ita eadem E A ad A G, quare A G erit æqualis ipſi A H, totum videlicet parti, quod eſt abſurdum; non igitur in H, ſed in G cadet linea C F, quod &c.

* * *

PROP. IV. THEOR. IV.

Si in quadrilatero ductæ fuerint duæ ſe inuicem ſecantes lineæ, quarum vnaquæque duo oppoſita latera in eadem ratione diuidat, figura reſultans erit quintum elementum.

tab.5. fig.40. SIT quadrilaterum ACEG, ſitque CB ad BA, vt EF ad FG, itemq; ED ad DC, vt GH ad HA, & iungantur lineæ BF, HD, quæ ſe inuicem ſecent in I. Dico figuram hanc illam eſſe, quam in quinto elemento conſiderauimus. Si enim hoc verum non eſt, ratio ED ad DC, non erit illa, quæ componitur ex rationibus AB ad BC, GH ad HA, & EF ad FG. Sit igitur alia EK ad KC. Itaque cum EK ad KC componatur ex prædictis rationibus, imò ex ijſdem AB ad BC, EF ad FG, & GH ad HA perturbatè acceptis; quin etiam ex rationibus AB ad BC, CB ad BA, & GH ad HA; ſeù tandem ex rationibus AB ad BA, & GH ad HA; vel ex ipſis GH ad HG ad HA; erit EK ad KC, vt GH ad HA: Sed in eadem ratione eſt etiam ED ad DC; ergo vt EK ad KC, ita ED ad DC, & componendo, EC ad CK erit vt eadem EC ad CD, æqualis igitur eſt CK ipſi CD, totum parti, quod eſt abſurdum, quod &c.

PROP. V. THEOR. V.

Si tria trianguli latera ita diuiſa ſint, vt ratio partium vnius fiat ex rationibus partium reliquorum laterum: inde iunctis diuiſionum punctis, tribus rectis lineis, adeout ex ipſis conſtet triangulum inſcriptum priori, cuius etiam latera eodem modo partiamur; demum verò ab angulis trianguli ad reperta puncta ſecundæ diuiſionis, tres alias lineas ducamus, iſtæ ſi producantur in idem punctum conuenient.

tab.5. fig.41. SIT triangulum ADG, cuius tria latera GA, AD, DG, ita diuiſa ſint in HCE, vt GH ad HA componatur ex rationibus DC ad CA, GE ad ED. Iungantur lineæ HC, CE, EH, quæ ita ſecentur in punctis NLK; vt ſimiliter EL ad LC componatur ex rationibus HN ad NC, & FK ad KH. Iungamus demum lineas

DL, GK, AN. Dico, has productas, in eodem puncto ſe inuicem ſecare. Producantur ergo, & linea GK occurrat lateri DA in B; ipſa verò DL lateri AG in I, & recta demum AN ſecet DG in F.

Quoniam in elemento tertio, cuius grauia A; C-A; E-G; G, quorum centrum L; recta GI ad IA, hoc eſt pondus A ad G componitur ex rationibus grauium A ad C ad F ad G, rectarum videlicet CD ad DA; EL ad LC; & DG ad ED; ratio autem EL ad LC componitur ex rationibus HN ad NC, & EK ad KH; erit GI ad IA compoſita ex rationibus CD ad DA; HN ad NC; EK ad KH; & DG ad ED; Seu ex rationibus CD ad CA ad AD; HN ad NC; EK ad KH; DG ad GE ad ED; ex duabus verò rationibus DC ad CA, & GE ad ED componitur HG ad AH, quæ eſt compoſita ex duabus HG ad GA ad AH; ratio igitur GI ad IA, componetur ex rationibus, licet perturbatè ſumptis HG ad GA ad AH; CA ad AD; DG ad GE; HN ad NC; & EK ad KH; vel denuo ex ijſdem perturbatè acceptis, nimirum HG ad GA; EK ad KH; DG ad GE; CA ad AD; HN ad NC; GA ad AH; & quia in elemento tertio, cuius grauia A, H-A; E-D; & D, quorum centrum K, componitur DB ad BA, pondus videlicet A ad D ex rationibus ponderum A ad H ad E ad D; imò rectarum HG ad GA; EK ad KH; & DG ad GE; & in elemento pariter tertio, cuius grauia D; C-D; H-G; G, centrumque N, ratio GF ad FD, ponderis nempe D ad G componitur ex rationibus ponderum D ad C ad H ad G, rectarum ſcilicet CA ad AD; HN ad NC; & GA ad AH: ratio GI ad IA, quæ compoſita fuit ex rationibus HG ad GA; EK ad KH; DG ad GE; CA ad AD; HN ad NC; & GA ad AH, componetur etiam ex rationibus DB ad BA, & GF ad FD; ideoque ex coroll. prop. 1. huius, lineæ AN, DL, GK conuenient in idem punctum, quod erat &c.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si latera, & baſis trianguli bifariam ſecta ſint, atque à ſectione baſis duæ rectæ indefinitæ per diuiſiones laterum ducantur; inde per verticem trianguli, extra ipſum, alia quadam recta perducta ſecet eas lineas, quas egimus à dicto baſis puncto; tandem à duobus illarum diuiſionum punctis ad angulos baſi *adiacentes, & ad eaſdem partes ducantur lineæ, erunt ipſæ inter ſe parallelæ.*

tab. 5. fig. 42.

SIT triangulum D A G, cuius & latera D A, A G, & baſis D G biſariam ſecentur in punctis E K F, iunctiſq; F E, F K protrahantur indefinitè, ducta verò vtrinq; per verticem A, recta B A H quomodocunque ſecante prædictas lineas indefinitas in punctis B H, ita tamen vt tota ſit extra triangulum A G D, iungantur B D, H G; dico has parallelas inter ſe eſſe. Vel enim B H, D G ſunt inter ſe æquidiſtantes, vel non; Si fuerint æquidiſtantes iungatur E K, quæ erit parallela ipſi D G, & propterea etiam rectæ B H. Quare cum D G ad E K ſit vt D A ad A E, ſiue vt A D ad D E, vel B F ad F E propter ſuppoſitas parallelas; vt verò B F ad F E, ita B H ad E K; eandem proportionem habebit D G ad E K, quam B H ad eandem E K, & ideo D G, B H æquales erunt, ſuntq; etiam æquidiſtantes; ergo B H G D ſpatium parallelogrammum erit, & ideo H G, B D erunt etiam ipſæ æquidiſtantes: Quod ſi B H, D G parallelæ non ſint protrahantur donec ſibi occurrant in puncto I. Et quia B I ad I H componitur ex rationibus B I ad I A ad I H; recta verò B I ad I A, hoc eſt pondus A ad B in elemento primo, cuius grauia B I D, & centrum E, componitur ex rationibus grauium A ad E ad B, rectarum videlicet E D ad D A, & F B ad F E; eſt verò F B ad F E, hoc eſt B H ad H A, vt F H ad H K ob parallelogrammum A K F B; erit B I ad I A compoſita ex rationibus E D ad D A, & F H ad H K. Item, quia in elemento primo, cuius grauia A I F, & centrum K, componitur I A ad I H, pondus videlicet H ad A, ex rationibus ponderum H ad K ad A, rectarum ſcilicet K F ad F H, & A G ad G K; vt autem A G ad G K, ita D A ad D E; componitur igitur I A ad I H ex rationibus K F ad F H, & D A ad D E; idcirco prior ratio B I ad I H fiet ex rationibus E D ad D A, F H ad H K, K F ad F H, & D A ad D E; vel ex iiſdem perturbatè ſumptis, hoc eſt ex rationibus E D ad D A ad D E; K F ad F H ad H K; itaque vt B I ad I H, ita K F ad H K.

Rurſus D I ad I G componitur ex rationibus D I ad I F ad I G: Sed in elemento primo, cuius grauia D I B, & centrum E, recta D I ad I F, hoc eſt pondus F ad D componitur ex rationibus ponderum F ad E ad D, rectarum ſcilicet E B ad B F, ſeu A B ad B H; imò K F ad F H, & D A ad A E. Pariterque in primo elemento, cuius

cuius

cuius grauia F I A, & centrum K, recta I F ad I G componitur ex rationibus ponderum G ad K ad F, rectarum videlicet K A ad A G, & F H ad H K; ergo prior ratio D I ad I G componitur ex rationibus rectarum K F ad F H; D A ad A E; K A ad A G, & F H ad H K; vel ex iiſdem perturbato ordine, nimirum ex rationibus K F ad F H ad H K; K A ad A G, & D A ad A E, vel A G ad K A. Quare D I ad I G erit vt K F ad H K, nempe in eadem ratione in qua fuit B I ad I H; idcircò B D parallela erit eidem G H, quod &c.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si tria triangula latera eomodo ſint diuiſa quo fuere latera trianguli elementi ſecundi, & iungantur diuiſionum puncta tribus rectis lineis, quæ biſariam ſecentur, & ad earum ſectiones ab angulis correſpondentibus lineas deducamus, ſi hæ producantur ſe inuicem ſecabunt in eodem punito, hoc autem punctum erit intra triangulum conſtans ex prioribus iunctis lineis.

SIT triangulum A B C, cuius latera ita diuiſa ſint in D F E, vt ratio C F ad F A fiat ex rationibus B E ad E A, & C D ad D B; iungantur verò F D, D E, E F, quæ ſecentur biſariam in K H G. Dico iam, ſi iungamus etiam lineas A G, C H, B K, in eodem puncto ſibi omnes occurrere, & quidem intra triangulum D E F.

tab. 5. fig. 41.

Nam C F ad F A componitur ex rationibus B E ad E A, & C D ad D B; itemque E K ad K D, ratio ſcilicet æqualitatis, componitur ex duabus rationibus æqualitatis F H ad H D, & E G ad G F: ergo ſi protrahantur tres lineæ A G, C H, B K, in idem ſimul punctum conuenient. Quod ſi quis neget hoc punctum intra triangulum E F D exiſtere, erit neceſſariò in vna linearum B K, A G, C H; alioquin tres iſtæ lineæ non in eodem puncto ſibi occurrerent; ponamus ergo illud eſſe primum in linea B K in I; adeout productæ lineæ A G, C H, cadant in I. Quoniam, iunctis K G, K H, ſpatium G K H F eſt parallelogrammum, ſecat autem linea A C ipſam G F, ſi producatur A C verſus C, & K H verſus H conuenient in M; eademque ratione protractæ K G, C A ad puncta E A conuenient in L. Demum iunctæ E L, D M, erunt hæc (ex antecedenti) parallelæ inter ſe; quare A E, C D non conuenient in B, quod eſt contra hypotheſim; & ideo lineæ A G, C H pro-

ex Theor. 5. huius. tab. 5. fig. 45.

productæ non occurrent lineæ B K, niſi intra triangulum E F D: Idem concludetur de lineis A G, B K, occurrere videlicet non poſſe lineæ C H, niſi in eodem triangulo E F D: pariterque de lineis B I, C H, occurrere non poſſe lineæ A G, niſi intra idem triangulum; ergo, cùm (vt dictum eſt) ſibi ipſis occurrere debeant, neceſſe eſt, vt punctum concurſus intra triangulum E F D exiſtat, quod &c.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si, vt ſupra, diuiſa ſint tria trianguli latera; duo autem diuiſionum puncta vna recta linea iungantur, quæ ſecet aliam lineam ductam ab angulo eiuſdem trianguli, non tamen ab eo, cui iuncta linea ſubtenditur; ſic illa per hanc diuidetur, vt ipſius ſegmenta ex duabus rationibus componantur, quarum altera ſit ex partibus intacti lateris, alia verò conſtat ex portionibus eius lineæ, quæ ſegmentum eſt alterius lateris inter diuiſam lineam, ac angulum, cui ſubtenditur reliquum trianguli latus, interiectum.

tab. 5. fig. 46.

SIT triangulum A C F, cuius tria latera A F, F C, C A, diuiſa ſint deinceps in G D B, itaut ratio A G ad G F componatur ex duabus rationibus C E ad E F, & A B ad B C, iuncta verò G D ſecet ductam A E in H; Dico quod E H ad H A componitur ex rationibus C B ad B A, & E D ad D C. Nam in figura primi elementi, cuius grauia A F D, & centrum H, ratio rectæ E H ad H A, ponderis nempe A ad E, componitur ex rationibus grauium A ad F ad E, rectarum videlicet F G ad G A, & D E ad F; ſed ratio rectæ F G ad G A componitur (ex ſuppoſitione) ex rationibus C B ad B A, & F D ad D C; ergo prædicta ratio E H ad H A componetur ex rationibus C B ad B A; F D ad D C; & D E ad D F, vel ex iiſdem perturbatè ſumptis C B ad B A; D E ad D F ad D C; hoc eſt ex propoſitis rationibus C B ad B A, & D E ad D C, quod &c.

PROP. IX. PROB. I.

Propoſito triangulo, ellipſim, vel quando poſſibile eſt, circulum eidem inſcribere, ita vt ex tribus contactuum punctis duo quælibet ſint data.

tab. 5. fig. 44.

SIT triangulum A B C, & in eo data puncta F E, per quæ ducenda ellipſis debeat contingere lineas A B, C B. Ponatur problema, vt factum, ſitq; ellipſis inſcripta F E D, contingens reliquum latus A C in D. Cum igitur C D ad D A componatur ex *ex lem. 1.* rationibus geometricè datis F B ad F A, & C E ad E B, erit punctum D datum, quare ſi iungantur lineæ D F, F E, E D, & ipſæ datæ erunt. Similiterq; ſi bifariam diuidantur in punctis H I K, hæc item data erunt; atque adeo etiam iunctæ A H, B I, C K, quæ diametri erunt eiuſdem ellipſis. *29. l. 2. conic.* Cumque in vnaquaque ipſarum, centrum dictæ ellipſis exiſtat, atque ſibi ipſis in vno, eodemque puncto G occurrant, erit hic occurſus datus, atque adeò datum erit prædictum centrũ G. Lineæ igitur A G, B G, C G, erunt illæ, quæ ex centro ſectionis dicuntur; quare ſi vna ipſarum protrahatur, nempe F G à puncto G, atque in productione notetur G L æqualis F G, erit punctum L datum, vnà cum F L diametro; Et quia punctum datum E in ſectione ponitur, eſtque contingens B F poſitione habita; quæ igitur ab ipſo puncto ducitur æquidiſtans ipſi B F, occurrens diametro F L in M, vt eſt E M, erit poſitione, & longitudine determinata, eritque ad eandem diametrum F L ordinatim applicata. Fiat iam vt F M data ad M E, ita M E ad aliam lineam Y, cui ſecetur æqualis M N perpendiculariter excitata à puncto dato M, ad F L poſitione habitam; ductaq; indeterminatè, ab F puncto dato, linea F O ipſi M N æquidiſtante, iungatur L N, & producatur donec occurrat F O in O. Hoc poſito datum erit punctum O; rectangulum verò F M N erit æquale quadrato applicatæ M E, quod rectangulum adiacet lineæ F O, latitudinemque habet ipſam F M inter applicatã E M, & tactum F interiectam, & deficit figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ diametro F L, & linea F O continetur; quamobrem diameter F L erit tranſuerſum figuræ latus, & F O rectum. Si igitur datis duabus rectis lineis terminatis F O, F L, ad rectos inter ſe angulos, inueniamus ellipſim *Prop. 54. lib. 1. Con.* circa diametrum F L, ita vt vertex ſit punctum F ad rectum angulum, & ordinatim applicatæ in angulo B F L poſſint, vt M E, rectangula adiacentia ipſi F O, quæ latitudinem habeant lineam inter verticem F ſectionis, & applicatas ipſas interiectam, deficiantque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ lineis F O, F L, continetur; ellipſis hæc continget lineam B A in F, & tranſibit per punctum E. Dico inſuper quod huiuſmodi ellipſis ita tranſibit per E, vt non ſecet, ſed tangat B C, & A C, atque adeò problemati ſatisfactum eſſe.

Hæc autem fient conſpicua duobus lemmatibus, iiſdem retentis literis, ac ſuppoſitione.

LEMMA IV.

tab.6. SI ellipſis F E D tranſiens per punctum E non contingit lineam
fig.47. B C, contingat ſi poſſibile eſt aliam lineam B K, & iungantur
F K, K E. Quoniam igitur F B contingit ſectionem in F, diameter
30. ſecundi conic. B G ſecabit bifariam in L lineam F K, quæ iungit contactus F K,
eritque F L æqualis L K; ſed etiam F I ex ſuppoſitione eſt æqualis
2. ſexti. I E; ergo linea E K parallela erit diametro B G, ideoque non conuenient, At quia D C ad D A componitur ex rationibus B F ad
F A, & C E ad E B, ſuntque F D, F E, E D, bifariam ſectæ in N I K,
7. huius. iunctæ A N, B I, C K, ſe inuicem ſecabunt in eodem puncto, intra
ex conuerſa 25. primi conic. triangulum F E D; & propterea punctum G infra lineam F E exiſtet; ſed eſt etiam infra F K, quia duæ tangentes B F, B K, conueniunt, ergo linea K E non erit parallela diametro B G, quod fieri
23. primi con. non poteſt; ellipſis ergo D F E tanget lineam B E C in puncto E.

LEMMA V.

tab.6. SI ellipſis, cuius centrum G contingens duas B F A, B E C rec-
fig.48. & 49. tas lineas in E F, non tangit etiam A D C in D, eſto linea ſectionem tangens A R O; & quia O R ad R A componitur ex rationibus B F ad F A, & O B ad E B, conſtat punctum contactus eſſe in R; itaque cum A F, A R tangant ellipſim, diameter A G bifariam diuidet F R, quæ iungit contactus; ſed etiam F D ſecta fuit bifariam ex ſuppoſitione in N; ergo R E parallela erit diametro A G, quare etiam F L ab ipſa diametro ſecabitur bifariam in centro G (erit enim ex 2. l. 6., vt F N ad N D, ita F G ad G L;)& ideo linea G F, hoc eſt G P æqualis erit ipſi G L, totum parti, quod eſt abſurdum, eſt enim punctum L intra ellipſim, & ideo intra lineam G P.

* * *

PROP.

PROP. X. THEOR. IX.

Si lineæ rectæ parabolam contingentes inter ſe conueniant, quæ per contactum interceptæ tangentis, & concurſum duarum reliquarum ducitur linea, ſic illam, quæ iungit reliquos contactus, ſecabit, vt eius ſegmenta inter ſe rationem eandem obtineant, quam quadrata partium homologè ſumptarum vnius tangentis.

SIT parabola A E C, quam contingant tres lineæ A F G, F E D, *tab.6.*
G D C, in punctis A E C; inde iungatur G E, & produ- *fig.50.*
catur, vt ſecet A C in puncto B; dico A B ad B C eſſe vt quadratum ex F E ad quadratum ex D E. Quoniam propter elementum tertium, cuius vertex G, & centrum E, ratio rectæ A B ad B C, ponderis nempe C ad A, componitur ex rationibus grauium C ad D ad F ad A, rectarum ſcilicet D G ad G C, F E ad E D, & G A ad
G F: eſt autem vt D G ad G C, ita A F ad G A; erit A B ad B C *41. tertij conic.*
compoſita ex rationibus A F ad G A; F E ad E D; & G A ad G F;
& ex eiſdem perturbatè acceptis, hoc eſt ex rationibus F E ad E D,
A F ad G A ad G F; imò ex ipſis F E ad E D, & A F ad G F, vel ex
duplicata ratione F E ad E D; eſt igitur A B ad B C, vt quadratum *ibidem.*
ex F E, ad quadratum ex D E, quod &c.

PROP. XI. THEOR. X.

Iiſdem manentibus iungantur A D, C F; ſecantes ſeſe in H; dico punctum H eſſe in linea G E B.

NAM ſi poſſibile eſt, vt H ſit extra lineam G E B, producta *tab.6.*
G H, non cadet in B; ſed in aliud punctum I; itaque prop- *fig.52.*
ter elementum ſecundum, in quo H eſt centrum ponderum D F I, & grauia ſuſpenſa ſunt A G C, erit recta A I ad I C, hoc eſt graue C ad A compoſitum ex rationibus grauium C ad G ad A, rectarum ſcilicet G D ad D C, & A F ad F G: Verum vt A F ad F G, itemq; vt G D ad D C, ita F E ad E D; ergo A I ad I C, erit vt quadratum ex F E ad quadratum ex E D. Sed in eadem quadratorum ratione eſt etiam A B ad B C; ergo vt A I ad I C, ita A B ad B C,

&

& componendo, vt A C ad I C, ita A C ad C B, & ideo I C æqualis eſt C B, totum videlicet parti, quod eſt abſurdum; cadet igitur G H in B, & propterea H erit in linea G E B, quod &c.

PROP. XII. THEOR. XI.

Si linea contingens parabolam ſecet duas alias contingentes, hæc autem ſectionum puncta, & contactus earundem tangentium, duabus ſe inuicem ſecantibus lineis coniungantur; cubi ex portionibus prioris contingentis inter parabolam, & duas reliquas contingentes interiectis, erunt inter ſeſe vt triangula homologè ſumpta, quorum baſes ſunt reliquæ contingentes, vertices verò idem punctum, in quo dictæ iunctæ lineæ ſe inuicem ſecuerunt.

REcta F D contingat parabolam A E C in E, ſecet autem duas contingentes F A, D C in F, & D; indè iungantur A D, F C, quæ ſe inuicem ſecent in H; dico cubum ex F E ad cubum ex E D eſſe in eadem ratione, in qua eſt triangulum F A H, cuius baſis contingens A F, ad triangulum D H C, cuius baſis altera contingens D C; Iungantur A C, E H, & productæ tangentes A F, C D, conueniant in G; vtrinque verò protracta E H, ſecet A C in B, quæ ex alia parte tranſibit per G. Quoniam in elemento quarto, in quo H eſt centrum ponderum E B, grauium nimirum F A C D, recta A B ad B C, pondus nimirum C ad A componitur ex rationibus grauium C ad F ad D ad A, rectarum videlicet F H ad H C, E D ad E F, & A H ad H D, ſeu ex ijſdem perturbatè ſumptis, hoc eſt ex rationibus F H ad H C, A H ad H D, & D E ad E F; eadem verò A B ad B C componitur ex duplicata ratione ipſius F E ad E D; ſeu ex triplicata eiuſdem rationis F E ad E D, vnà cum ratione conuerſa ipſius D E ad E F; ſi igitur vtrinque dematur ratio D E ad E F, ſupererit tripla F E ad E D, hoc eſt cubus ex F E ad cubum ex E D, compoſitus ex rationibus F H ad H C, & A H ad H D, ex quibus rationibus cum item componatur triangulum F H A ad D H C, patet cubum ex F E, ad cubum ex E D, eſſe vt triangulum F H A ad triangulum D H C, quod &c.

SCHOLIVM.

Illud etiam ſciendum eſt, quod ſi in elemento ſecundo, cuius centrum H, & grauia ſuſpenſa ſunt G A C, duæ tantum rationes

cognoſcantur ex illis ſex, de quibus iam egimus, præcipuè in problemate ſeptimo primi libri, reliquas quatuor non ſolum dabimus, verùm etiam omnes alias in ſuperiori figura conſpicuas, & hoc quidem ex ſexto, ſeptimo, nono, & decimo probl. lib. 1.

PROP. XIII. PROBL. II.

Hyperbolam, ellipſim, & circulum quædam linea contingat, & per contactum ducta ſectionis diametro, hanc vna cum tangente tangens alia ſecet, & ſit data partium ratio poſtremæ tangentis: oportet alteram manifeſtare, quæ fit ex portionibus ductæ diametri.

tab. 6. fig. 51. & 52.

ESto C centrum coniſectionis A B, quam contingat linea A D in A, & iuncta C A producatur extra ſectionem, vt ſimul cum tangente A D ſecetur ab alia contingente ducta ex B, hoc eſt C A producta in E, & A D in D: Dico quod ſi manifeſta fuerit ratio B D ad D E, etiam C A ad A E manifeſta erit. Iungatur C B, quæ producta occurrat rectæ A D in puncto F. Itaque conſtructa erit figura elementi primi, cuius centrum D, & vertex C; & quia, 1. 3. conic. ex conicis, triangulum E D A æquale eſt triangulo B D F, erit D B 14. 6. Euc. ad D E, vt D A ad D F; eſt autem data ratio B D ad D E; ergo & ipſa A D ad D F dabitur; datis verò duabus rationibus D B ad D E, & A D ad D F, manifeſtabimus quoque duas reliquas, & propterea dabitur C A ad A E, quod &c.

PROP. XIV. THEOR. XII.

Si duæ lineæ circulum, vel ellipſim contingentes productæ conueniant, & ab alio in ſectione aſſumpto puncto ducatur tangens alia, priores duas diuidens, quarum contactus, ac diuiſionum puncta duabus ſe inuicem ſecantibus lineis coniungantur; inde à puncto ſectionis ad priorum tangentium occurſus linea ducatur, hæc producta (cum opus ſit) tranſibit per reliquum contactum, adeout figura inde reſultans reſoluatur ſaltem in duas figuras primi elementi.

tab. 6. fig. 52. & 54.

SIT ellipſis, vel circuli circumferentia A B C, quam contingant duæ lineæ A F, C D, quæ productæ conueniant in E;

ducta inſuper alia contingente F B D ſecante tangentem A E in F, atque C E in D, iungantur duæ lineæ A D, C F diuidentes ſeſe in G. Iam acta E G, & producta (cum opus ſit) dico illam tranſire per reliquum contactum B.

Nam ſi tres tangentes conſtituant triangulum circa ellipſim, vel circulum circumſcriptum propoſitum, iam oſtendimus in prima propoſitione 2. huius. Quod ſi cõtingens F B D ſecuerit duas alias A F E, C D E inter earum contactus A C, & occurſum E, hoc etiam per reductionem ad id quod fieri nequit oſtendemus. Non tranſeat enim (ſi fieri poteſt) iuncta E G per contactum B; ſed tranſeat per N; ducta autem alia contingente K I L, quæ vtrinque producta, vnà cum duabus E A K, E C L, conſtituat triangulum E K L, circulum, vel ellipſim contingens in punctis A I C, iungantur A L, K C, quæ ſe inuicem ſecent in M. Cum igitur E N G ſit vnica recta linea, duæ figuræ E D C G F N, E F A G D N ſpectabunt ad primum elementum; & ideo recta F N ad F D, hoc eſt pondus D ad N componetur ex rationibus grauium D ad E ad N, rectarum videlicet C E ad C D, & G N ad G E; itemque in alia elementi primi figura recta F D ad N D, pondus nempe N ad F; duæ nimirum rationes ponderum N ad E ad F fient ex rationibus rectarum G E ad G N, & A F ad A E: idcircò duæ rationes F N ad F D ad N D, hoc eſt F N ad N D, componetur ex rationibus C E ad C D, G N ad G E ad G N, & A F ad A E, hoc eſt ex rationibus C E ad C D, & A F ad A E.

2.2. huius. Inſuper K I ad I L componitur ex rationibus E C ad C L, & K A ad A E; eademque ratio componitur etiam ex rationibus D C ad C L, F B ad B D, & K A ad A F; ſed E C ad C L componitur ex duabus E C ad D C ad C L; pariterque K A ad A E componitur ex rationibus K A ad A F, & A F ad A E; ergo compoſita ex rationibus E C ad D C ad C L, K A ad A F ad A E, erit illa quæ componitur ex rationibus D C ad C L, F B ad B D, & K A ad A F; ablatis igitur vtrinque rationibus D C ad C L, & K A ad A F, erit reliqua F B ad B D compoſita ex rationibus E C ad D C, & A F ad A E. Sed, vt oſtendimus, etiam F N ad N D ex iiſdem rationibus componitur; ergo vt F N ad N D, ita F B ad B D, & componendo, F D ad N D, erit vt eadem F D ad B D, & ideo N D æqualis erit ipſi B D, totum parti, quod eſt abſurdum, tranſibit igitur E N G per contactum B, quod &c.

COROLLARIVM.

Conſtat tùm in ellipſi, tùm in circulo eſſe F B ad B D, vt eſt compoſita ex C E ad C D, & A F ad A E. tab. 7. fig. 55. & 56.

PROP. XV. THEOR. XIII.

Si duæ tangentes circulum, inter ſe conueniant, quas ſecet tangens alia inter earum occurſum, & contactus; rectangula ex prioribus tangentibus ad occurſum vſque acceptis, & portionibus inter earum contactus, atque alteram tangentem interiectis, conſtantia; erunt inter ſeſe, vt ſunt portiones modò dictæ tangentis, adeont homologa ſint contermina.

SIT circulus A B C, quem contingant A E, C E in punctis A C, & ducatur alia F B D, quæ circulum tangat in B; ſecet verò A E in F, & C E in D. Dico F B ad B D eſſe vt rectangulum E A F ad rectangulum E C D. tab. 7. fig. 56.

Iam ex antecedenti corollario ratio F B ad B D componitur ex rationibus rectarum C E, ſiue E A ad C D, & A F ad A E, vel E C; quare F B ad B D erit vt compoſita ex A E ad C D, & A F ad C E, ſiue vt rectangulum E A F ad rectangulum E C D, quod &c.

PROP. XVI. THEOR. XIV.

Si ab angulis trianguli ad oppoſita vſque latera tres rectæ lineæ bifariam angulos ſecantes ductæ ſint, in eodem puncto ſe mutuò diuident; figura verò ex his lineis conſtans erit illa ſecundi elementi.

SIT triangulum A I E, & ab angulis I A E bifariam diuiſis, ducantur lineæ I C, A G, E N occurrentes oppoſitis lateribus in C G N: dico has lineas in eodem puncto B ſecari, hoc eſt E C ad C A componi ex rationibus I N ad N A, & E G ad G I; & ideo figuram ex his lineis compoſitam ſpectare ad ſecundum elementum. Nam ratio E C ad C A, hoc eſt E I ad I A (propter angulum I bifariam ſectum) componitur ex rationibus I E ad E A ad A I; tab. 1. fig. 5.

vtque I E ad E A, ita I N ad N A; & vt E A ad A I, ita E G ad G I; ergo E C ad C A componitur ex rationibus I N ad N A, & E G ad G I, quod &c.

LEMMA VI.

Datis duobus circulis lineam vtrumque contingentem ducere.

tab. 7. fig. 58. SInt duo circuli, quorum centra K I, oportet lineam ducere, quæ vtrumque contingat. Ponatur iam factum eſſe problema, & linea contingens ſit A F; iungamus A K, K I, I F: & quia in primo caſu, cum duo circuli ſint æquales, etiam K A, I F ſunt æquales, & æquidiſtantes inter ſe, cum vnaquæque illarum eidem A F perpendicularis ſit, erit ſpatium K A F I parallelogrammum rectangulum, & ideò A F contingens æquidiſtans erit rectæ K I; cum igitur duo puncta K I data ſint, erit quoque poſitione data linea K I, pariterque ad ipſam perpendicularis K A: quare datum eſt punctum A, à quo ſi ducatur linea æquidiſtans ipſi K I cadet hæc in lineam A F, & dabitur contingens A F, quod &c.

tab. 7. fig. 60. & 61. Sint deinde, vt in duobus reliquis caſibus, circuli inæquales, & producta K I in tertia figura conueniat in L cum contingente A F pariter producta ad partes circuli minoris, quemadmodum in eodem puncto L contingens A F in ſecunda figura occurrit eidem K I, Quoniam vtraque ipſarum K A, I F perpendicularis eſt ad A F, erunt inter ſe æquidiſtantes, & propterea vt K A ad I F, ita K L ad L I; componendo autem in ſecunda figura, & in tertia diuidendo, erit K I ad I L, vt cōpoſitum ex duabus K A, F I in ſecunda figura, ſed vt earum differentia in tertia, ad eandem H I. Itaque cum tam ratio compoſiti, quam differentiæ duorum prædictorum radiorum ad radium minorem data ſit; & item data ſit longitudine, ac poſitione antecedens K I, dabitur quoque conſequens I L, & punctum L; quare cum ab eodem puncto L ducere poſſimus vnicam tantum lineam contingentem I F, & vnicam alteram tangentem circulum K A, neceſſe eſt vt iſtæ cadant in contingentes F L, L A, ſeu A F L, quam à principio poſuimus tangentem duos circulos, Compoſitio problematis manifeſta eſt.

PROP. XVII. THEOR. XV.

Si triangulum tres circulos comprehendat, cuius ſingula latera duos ex ſuppoſitis circulis contingant; ab vnoquoque verò angulo ad centrum ſibi proximioris circuli lineæ ducantur: iſtæ ſi vlterius producantur, ſibi inuicem in idem punctū occurrent.

tab. 8. fig. 62. SInt tres circuli, quorum centra C A B, & triangulum ipſos comprehendens ſit L E H, tangatque illos in punctis M D F G I K; dico, ſi iungantur tres lineæ H A, E C, L B, & producantur, in idem punctum ſibi ipſis occurrere. Iungantur lineæ D F, M K, G I, ſecantes lineas E C, L B, H O, in punctis P Q N. *36. tertij. Conic. lib. 2. prop. 30.* Quoniam contingentes D E, E F, & D P, P F ſunt inter ſe æquales; latus autem E P commune eſt vtrique triangulo D P E, F P E; erunt huiuſmodi triangula inter ſe æqualia, proptereaque angulus D E P æqualis erit angulo F E P; cumque eadem ratione anguli M L Q, Q L K, ſint etiam æquales, itemque anguli I H N, G H N; conſtat tres lineas E C, H A, L B, ſibi ipſis occurrere ſi producantur, quod &c. *16. 2. huius.*

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Duos circulos A F, D C, contingant duæ rectæ A C, & F D, quarum F D priori occurrat in B; iunctis vero lineis A F, D C, producatur D C, adeout occurrat ipſi A F, in E, dico rectangulum D E A æquale eſſe rectangulo C E F.

tab. 7. fig. 59. QVoniam F E ad E A, pondus videlicet A ad F, in figura elementi primi, cuius grauia F A C, & centrum D, componitur ex rationibus grauium A ad C ad D ad F, rectarum nimirum C B ad B A, D E ad E C, & F B ad B D; vtque C B ad B A, ita B D ad F B; erit E F ad E A compoſita ex rationibus B D ad F B, D E ad E C, & F B ad B D, vel ex ijſdem perturbatè acceptis, nempe ex rationibus B D ad F B ad B D, & D E ad E C; hoc eſt E F ad E A erit vt D E ad E C: rectangulum igitur contentum lineis extremis E F, E C, æquale erit ei quod fit à medijs quatuor illarum proportionalium, ergo &c.

PROP. XIX. PROB. III.

Sint inter ſe duo ſic aptata triangula, vt reciprocè vertex vnius deſinat in alterius baſim, atque adeò eorum latera ſe inuicem ſecent: diſtinguemus in huiuſmodi figura ſex rectarum rationes, ex quibus, datis quatuor quibuslibet, ſit nobis propoſitum duas reliquas inueſtigare.

tab. 8. fig. 63. HVius problematis ſunt quindecim caſus; totidem ſunt enim numeri binarij combinabiles in ſenario.

I. Sint notæ quatuor rationes G E ad E F; A B ad B C; A H ad H E; & B D ad D F: Sintque indagandæ duæ reliquæ G H ad H B, & F D ad D B. Iungantur duæ rectæ H D, B E, ſe inuicem ſecantes in I. Quoniam in elemento tertio, cuius centrum I, & grauia A; H - A; D - C; C, ſunt datæ tres rationes A H ad H E; E D ad D C; & A B ad B C; dabimus quoque reliquas duas rationes (ex nono probl. primi huius) H I ad I D, & B I ad I E; quare cum in figura eiuſdem elementi, cuius centrum I, grauia verò G; H - G; D - F; F, datæ ſint tres rationes G E ad E F; H I ad I D, & E I ad I B; manifeſtabimus (ex eodem probl.) etiam reliquas duas rationes G H ad H B, & F D ad D B.

II. Aperiendæ ſint duæ rationes A H ad H E, & E D ad D C, notis reliquis; erit hic caſus ſimilis priori.

tab. 8. fig. 64. III. Rationes, quas debemus patefacere ſint duæ A B ad B C; G E ad E F, habitis quatuor reliquis (caue tamen in hoc caſu ne A C, G F ſint parallelæ) Producantur A C, G F, quæ conuenient in I. Cum igitur A B ad B C componatur ex rationibus A B ad B I, & B I ad B C; item G E ad E F componatur ex rationibus G E ad E I ad E F; & in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, datæ ſint duæ rationes G H ad H B, & E H ad H A; & pariter in alia figura eiuſdem elementi, cuius grauia B I E, & eorum centrum D, datæ ſint duæ rationes E D ad D C, & F D ad D B; aperiemus in prima figura reliquas duas A B ad B I; G E ad E I; atque in ſecunda figura duas reliquas B I ad B C; & E I ad E F; datæ ſunt igitur rationes A B ad B I ad B C, hoc eſt A B ad B C; itemq; rationes G E ad E I ad E F, hoc eſt G E ad E F, quod erat propoſitum.

IV.

IV. Debeamus modo manifeſtare duas rationes E D ad D C, atque F D ad D B, ſuppoſitis reliquis quatuor. Si duæ A C, G F, ſint parallelæ iam patet propoſitum; ſi verò non ſint producamus illas vt prius, adeout conueniant in I; & quia in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, dantur duæ rationes A H ad H E, G H ad H B, manifeſtabimus (ex 6. probl. l. p.) duas reliquas A B ad B I, & G E ad E I; ſunt autem datæ rationes A B ad B C, & G E ad E F; ergo ablatis notis rationibus A B ad B I, videlicet A B ad B C, & G E ad E I, à prædicta G E ad E F; erunt reliquæ rationes B I ad B C, atque I E ad E F notæ: quare his duabus datis rationibus in primo elemento, cuius grauia B I E, & centrum D, palam fient reliquæ duæ B D ad D F, & D E ad D C, quod erat propoſitū.

V. Quod ſi inueſtigandæ rationes ſint A H ad H E, & B H ad H G, conſimili ferè ratiocinio abſoluemus problema; datis enim duabus B D ad D F, E D ad D C in elemento primo, cuius grauia B I E, & centrum D, fiunt notæ duæ reliquę B C ad B I, & E F ad E I; cumque ſupponantur datæ etiam C B ad B A, & F E ad E G, dabuntur etiam duæ reliquæ I B ab B A, I E ad E G. Itaque quoniam in primo elemento, cuius grauia A I C, centrumque H, notæ ſunt duæ rationes I B ad B A, & I E ad E G, reliquas item duas manifeſtabimus A H ad H E, & G H ad H B.

VI. Sint aperiendæ duæ rationes A H ad H E, & G E ad E F, habitis reliquis. Si A C, G F fuerint parallelæ, conſtat A H ad H E eſſe in eadem ratione, in qua B H ad H G, & ideo datam eſſe. Deinde quia G E ad E F componitur ex rationibus G E ad A B, A B ad B C, & B C ad E F; vt autem G E ad A B, ita data G H ad H B; A B verò ad B C eſt data, & vt B C ad E F, ita data C D ad D E; ergo etiam E F ad E G, quæ componitur ex datis rationibus, erit data.

Quod ſi A C, G F parallelæ non ſint, conueniant productæ in I; & quia in elemento primo, cuius grauia B I E, & centrum D, ſunt datæ duæ rationes B D ad D F, & E D ad D C; reliquas quoque C B ad B I, & E I ad F E notas reddemus; & ideo cum ratio nota C B ad B A componatur ex rationibus C B ad B I, quæ nota eſt, & I B ad B A; hæc etiam data erit; ideoque cum in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, datæ ſint duæ rationes I B ad B A, & B H ad H G, reliquas etiam A H ad H E, & G E ad E I notas exhibebimus; quare cum G E ad E F componatur ex datis ratio-

nibus

nibus G E ad E I ad E F; erit quoque ipſa manifeſta.

VII. Duas rationes G H ad H B, & A B ad B C manifeſtabimus eodem modo; nam caſus eſt ſimilis antecedenti.

VIII. Sint agnoſcendæ rationes G E ad E F, & G H ad H B, habitis reliquis quatuor. Datis duabus rationibus E D ad D C, & F D ad D B eluceſcunt B I ad B C, & E I ad E F; compoſita verò ex rationibus A B ad B I ad B C, eſt A B ad B C, quæ eſt data; ergo reliqua A B ad B I data erit; atque adeò in elemento primo, cuius grauia A I G, & centrum H, cum datæ ſint duæ rationes A H ad H E, & A B ad B I; duas item reliquas dabimus G H ad H B, & G E ad E I; componitur autem ratio G E ad E F ex rationibus G E ad E I, & E I ad I F, quæ datæ ſunt, ergo etiam illa elucebit. Quod ſi parallelæ ſint A C, G F, eodem ratiocinio vtemur, quo vſi ſumus in ſexto caſu.

IX. Quod ſi inueſtigandæ rationes ſint A H ad H E, & A B ad B C, erit hic caſus ſimilis priori.

X. Sint duæ rationes indagandæ G E ad E F, & E D ad D C, reliquis præcognitis. Si A C, G F ſint parallelæ, propoſitum oſtendemus, vt in caſu ſexto; at ſi parallelæ non fuerint G E, E F, productæ conuenient in I; quare cum duæ rationes ſint datæ G H ad H B, A H ad H E, etiam reliquas duas cognoſcemus, nempe A B ad B I, & G E ad E I; componitur verò ratio data A B ad B C ex rationibus A B ad B I data, & B I ad B C; ergo & iſta, quæ reliqua eſt elucebit; propterea datis duabus rationibus B I ad B C, & B D ad D F in figura primi elementi, cuius grauia B I E, & centrum D, manifeſtabimus quoque duas reliquas E D ad D C, & E I ad E F; quamobrem ſunt datæ duæ rationes G E ad E I, & E I ad E F; ſed ex his componitur ratio G E ad E F; ergo etiam ipſa non latebit.

XI. At ſi rationes, quas manifeſtare debemus fuerint A B ad B C, & B D ad D F, hanc partem problematis ſuperiori dicto modo monſtrabimus.

XII. Oporteat modò indagare duas rationes A B ad B C, & C D ad D E; & ſiquidem A C, G F parallelæ ſint eadem vtemur ratione, qua in ſexto caſu vſi ſumus; ſi verò non ſint, conueniant productæ C A, F G in I. Datis duabus rationibus G H ad H B, A H ad H E, dabimus reliquas duas A B ad B I, & G E ad E I; & datis duabus G E ad E F, G E ad E I, notificabimus reliquam E I ad E F; quare habitis duabus E I ad E F, & B D ad D F, cognoſcemus item

duas C D ad D E, & B I ad B C; habitiſq; duabus A B ad B I ad B C, ex quibus fit ratio A B ad B C, hæc ſimiliter dabitur.

XIII. Quod ſi notificandæ ſint duæ rationes G E ad E F, & F D ad D B erit hic caſus ſimilis priori.

tab. 8. fig. 65.

XIV. Si velimus indagare duas rationes A H ad H E, & B D ad D F pręcognitis reliquis, iungatur G C ſecans duas H E, B D in I K. Itaque quia in figura primi elementi, cuius grauia A C G, & centrum H manifeſtæ ſunt duæ rationes A B ad B C, & G H ad H B; erunt notæ reliquæ duæ A H ad A I, & I C ad C G; pariterque cum in alia figura primi elementi, cuius grauia C G F, eorumque centrum D habitæ ſint duæ rationes E D ad D C, & G E ad E F, fient conſpicuæ etiam duæ reliquæ D F ad D K, & G C ad C K; quare I C ad K C (compoſita videlicet ex duabus I C ad C G ad C K datis) cognoſcetur; ideoque in elemento tertio, cuius grauia A; B-A; D-E; E, & centrum K, datis tribus rationibus A B ad B C, I C ad K C, & E D ad D C, dabuntur etiam duæ reliquæ A I ad A E, & D K ad D B, modò tamen A E, B D parallelæ non ſint; idcircò datæ ſunt rationes A H ad A I ad A E; & D F ad D K ad D B, hoc eſt duæ rationes A H ad A E, & D F ad D B: at ſi æquidiſtantes fuerint B D, A E; minimè verò A C, G F, problema erit impoſſibile; quod, vt conſtet ducamus à puncto E lineam E L, quę ſecet D F in L, & producta per E, ſecetur à recta E K, adeò vt L E ad E K ſit vt F E ad E G, & iungatur B K ſecans A E in I. Erit igitur propter parallelas B F, A E, vt B H ad H G, ita B I ad I K; & vt F E ad E G, ita L E ad E K; rationes verò A B ad B C, & C D ad D E ſunt ipſæ ſuppoſitæ; ergo ſi caſus poſſibilis eſſet, deberet ratio A H ad H E eſſe eadem ac A I ad I E; item vt B D ad D F, ita oporteret eſſe B D ad D L, quod cum non ſit, nihil certi poteſt determinari.

tab. 8. fig. 66.

XV. & vltimo. Si rationes manifeſtandæ ſint B H ad H G, & C D ad D E; cauendum eſt vt ſupra ne ſint æquidiſtantes B G, C E quando duæ A C, G F non ſunt parallelæ inter ſe; eſt autem hic caſus ſimilis ſuperiori, itaque conſtat totum propoſitum.

PROP. XX. THEOR. XVII.

Si ab extremo cuiuſdam rectæ ad terminos alterius priori æquidiſtantis duas agamus lineas; inde ab altero extremo primæ parallela alia ducatur recta ſecans inter æquidiſtantes duas priores lineas: ratio parallelarum componetur ex duabus rationibus, quarum altera fit ex portionibus ſecantis lineæ; alia verò ex ſegmento, & tota recta inter æquidiſtantes interiecta, & in quam ipſa ſecans linea definit, adeout omnia homologa contermina ſint.

tab.8. fig.67. SInt duæ æquidiſtantes lineæ D C, E K, & ab eodem termino D ducamus duas lineas ad terminos alterius æquidiſtantis, quæ ſint D K, D E; inſuper ab alio termiuo C ducatur alia recta C I B ſecans D K in I, & D E in B. Dico rationem ex D C ad E K componi ex duabus rationibus C I ad I B, & B D ad D E. Quoniam B C ſecat D C vnam parallelarum, ſi producatur, alteri etiam K E protractæ occurret in A. Quoniam igitur D C ad E K componitur ex rationibus rectarum D C ad A E ad E K; vt autem D C ad A E, ita D B ad B E propter parallelas; erit D C ad E K compoſita ex rationibus D B ad B E, & A E ad E K. Verùm in primo elemento, cuius grauia A K D, & centrum B ratio rectæ A E ad E K, ponderum videlicet K ad A componitur ex rationibus grauium K ad I ad A; rectarum nimirum D I ad D K, & A B ad B I, hoc eſt rectarum I C ad C A, & A B ad B I; Ergo ratio D C ad E K componetur ex rationibus D B ad B E; I C ad C A; & A B ad B I: Cumque I C ad C A fiat ex rationibus I C ad C B ad C A; vtque C B ad C A, ita ſit D B ad D E; erit D C ad E K compoſita ex rationibus D B ad B E; I C ad C B; B D ad D E; & A B ad B I. Verùm A B ad B I componitur ex rationibus A B ad B C, & B C ad B I; eſt autem A B ad B C, vt E B ad B D; ergo prædicta ratio D C ad E K componetur ex rationibus D B ad B E; I C ad C B; B D ad D E; E B ad B D, & B C ad B I; vel ex ijſdem perturbatè ſumptis, hoc eſt ex D B ad B E ad B D ad D E; I C ad C B ad B I; imò ex duabus B D ad D E; & I C ad B I, quod &c.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt, quod datis duabus rationibus B D ad D E; & I C ad B I; datur etiam ratio D C ad E K ex ijſdem compoſita.

PROP. XXI. THEOR. XVIII.

Iiſdem ſuppoſitis, ac conſtructis; fiat inſuper N O ad O P compoſita ex rationibus B E ad E D, & C I ad I B. Dico D I ad I K componi ex rationibus D B ad B E, & N O ad N P.

COmponitur A E ad E K ex rationibus A E ad D C ad E K; vtque A E ad D C, ita E B ad B D; & D C ad E K componitur (ex antecedenti) ex rationibus B D ad D E; & C I ad I B; ergo A E ad E K componitur ex rationibus E B ad B D ad D E; & C I ad I B; imò ex rationibus E B ad D E; & C I ad I B; hoc eſt A E ad E K eſt vt N O ad O P; componendo autem, deinde per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit E A ad A K, vt O N ad N P; At in elemento primo, cuius grauia A K D, & centrum B, recta D I ad I K, hoc eſt pondus K ad D componitur ex rationibus grauium K ad E ad D, rectarum videlicet E A ad A K, & D B ad B E; vel ex N O ad N P; & D B ad B E; ergo conſtat propoſitum. tab.8. fig.67.

COROLLARIVM.

Patet quod datis duabus rationibus D B ad B E, & C I ad I B manifeſtabimus quoque rationem D I ad I K.

SCHOLIVM.

Hinc cuique fas erit inſtrumentum elaborare, cuius beneficio, radiorum viſualium interualla metiatur, nulla præcognita diſtantia, aut iteratis ſtationibus, vt conſuetum eſt. tab.10. fig.85.

Circa D E ſint duæ regulæ parallelæ, E L immobilis circa E, B M verò mobilis circa D tanquam centrum, & ex puncto C ſit ducta alia linea immobilis, quæ ſecet vbilibet lineam D E, dummodo punctum ſectionis ſit inter extrema D E, cuiuſmodi eſt linea C B. Propoſitum igitur ſit obiectum K. *Nouum inſtrumentū pro diſtantijs metiendis.*

Poſito oculo in E attollatur, vel deprimatur inſtrumentum donec linea viſualis ſit in directum cum regula E L, quod continget quando per pinnacidia E L videbimus obiectum K, tum verò figatur, & confirmetur in eo ſitu inſtrumentum, ne poſſit in *partem vllam moueri, & ponatur oculus in D, & moueatur regula D M circa centrum D, donec intueamur per pinnacidia D M idem punctum K per lineam viſualem D K, quibus obſeruatis notetur diligenter pũctum I, ſectio videlicet linearum B C, D M.*

His poſitis, quia duæ rationes B D ad D E, & I C ad B I, ſaltem proximè haberi poſſunt ſecundùm numeros, dabitur etiam eodem pacto, quæ ex yſdem componitur, ratio videlicet D C ad E K (ex 20. propoſitione 2. huius) atq; adeò intelligemus quoties D C contineatur in E K, quæ quidem eſt interuallum viſualis E K ab oculo ad obiectum; ſed eadem ratione (ex 21. propoſitione 2. huius) ſciemus quoties D I metietur ipſam D K viſualem alteram ab oculo ad obiectum: ergo &c.

HÆC à me paucis perſtricta, quam latè pateant, vides, benigne lector. Nullæ enim ſunt adeo implexæ rectarum ſibi inuicem occurrentium ambages, quæ in noſtra elementa non reſoluantur; modò lineæ ea lege ſe inuicem ſecent, vt ſectione qualibet mutata, cæteras omnes variari neceſſe ſit. Hinc datis duabus, aut tribus rationibus continget ſæpe innumeras alias patefieri; quod vnuſquiſque in elemento ſecundo experiri poteſt, in quo, iunctis D B, B K, K D, ex 51. rationibus, datis duabus quibuslibet inueniet alias 49.

tab.1. fig.5.

FINIS CONSTRVCTIONIS STATICÆ.

* * *

VIſum eſt appendicis loco adÿcere his problematibus theoremata quædam, partim antiquis geometriæ legibus, partim Caualleriana methodo à me ſoluta, quamuis ex ſuperius dictis minimè pendeant. Cum enim in circulo inutiliter quadrando, hac omnia non inutiliter ſint inuenta, par erat, vt in eodem volumine luce publica fruerentur, quamuis opportunius ſuis in tenebris latuiſſent.

APPENDIX GEOMETRICA.

PROP. I. THEOR. I.

In quolibet triangulo rectangulo Scaleno Hypothenuſæ poteſtas ad eam maioris lateris, minorem; ſed harum linearum potentiæ ſeorſim ſumptæ ad eam minoris lateris maiorem proportionem habeant, quam ex appoſitis angulus ad angulum.

tab.8. fig.68.

SIT triangulum A B C rectangulum in B, cuius Hypothenuſa A C, maiuſque latus B A. Dico prius A C ad A B poteſtate minorem habere proportionem, quam habeat angulus A B C rectus ad angulum B C A. Secetur A C bifariam in E, centroque E, ac interuallo E A, vel E C ſemicirculus A B C deſcribatur, cuius quidem peripheria etiam per B punctum tranſibit (eſt enim angulus ad B rectus) deindè quia latus A B maius eſt latere B G, erit quoque arcus A B maior arcu B C; atque adeò ſemicirculi peripheria A B C non erit in B puncto bifariam ſecta; ſecetur ergo, & punctum ſectionis ſit D; quod quidem intra A, & B cadet; iunctis verò lineis D A, D I E, D C, D B, B C, B F, excitẽtur inſuper à punctis B D perpendiculares B G, D E ad A C diametrum, & linea D H ſecet bifariam angulum A D B; tandem, quia angulus A D C duplus eſt anguli A D E, hoc eſt A D I (hoc enim facilè deduci poteſt), itemq; angulus A D B duplus anguli A D H; erit permutando angulus A D C ad angulum A D B, ſicut angulus A D I ad ipſum A D H; eſtq; angulus A D C minor angulo A D B; (hoc enim in minori circuli ſegmento exiſtit) ergo angulus A D I minor erit ipſo A D H, atque adeò punctum H intra puncta I, & B cadet. His itaque poſitis, quia in triangulo A D B angulus ad verticem bifariam eſt ſectus à linea D H, erit vt recta A D ad D B, ita baſis ſegmentum A H ad H B, ſed A I ad H B, & multò magis ad I B minorem proportionem habet, quam recta A H ad H B, videlicet A D ad D B; recta verò A D ad D B habet etiam minorem

A. mag. proportionem, quam arcus AD ad arcum DB; ergo recta AI ad IB minorem habebit proportionem, quam dictus arcus AD ad arcum DB; componendo autem, atque per conuerſionem rationis, habebit recta AB ad AI, ſeu AG ad AE maiorem proportionem, quam habeat arcus ADB ad arcum AD, & conſequentium dupla; eſt autem AC dupla ipſius AE; atque ADC peripheria dupla ipſius AD; ergo AG ad AC, videlicet quadratum AB ad quadratum AC maiorem habebit rationem, quam circumferentia ADB ad circumferentiam ADC, imò quàm angulus AEB ad duos rectos; & eorum ſemiſſes, nimirum ACB angulus ad angulum rectum ABC; ſed inuertendo quadratum AC ad quadratum AB minorem habebit proportionem, quam angulus ABC ad angulum ACB.

II. Dico quadratum AC ad quadratum BC, hoc eſt lineam AC ad lineam BC potentia, maiorem habere proportionem, quam angulus ABC rectus ad angulum BAC. Quoniam enim recta AG ad AC maiorem habuit proportionem, quam circumferentia ADB ad circumferentiam ADC, habebit inuertendo recta AC ad AG minorem; ſed per conuerſionem rationis, recta AC ad CG maiorem habebit proportionem, quam circumferentia ADC ad BC; Verùm, vt recta AC ad CG, ita quadratum CA ad quadratum CB; & vt circumferentia ADC ad CB, ita duo anguli recti ad angulum BEC; vel eorum ſemiſſes, hoc eſt vnus rectus ABC ad angulum BAC; quadratum igitur AC ad quadratum CB maiorem habebit proportionem, quam angulus rectus ABC ad angulum BAC.

III. Demùm dico quadratum AB ad ipſum BC maiorem etiam proportionem habere, quam angulus BCA ad BAC: nam (vt proximè demonſtratum eſt) recta AC ad CG maiorem habet proportionem, quam circumferentia ADC ad ipſam CB; habebit ergo AG ad GC diuidendo, hoc eſt quadratum AG ad ipſum CB; ſeu quadratum AB ad BC maiorem rationem, quam circumferentia ADB ad ipſam BC, nimirum quam ACB angulus ad angulum BEC, & eorum ſemiſſes; hoc eſt angulus ACB ad angulum BAC, quæ &c.

* * * * *

PROP.

PROP. II. THEOR. II.

Si ex circuli centro ad eiuſdem diametrum perpendicularis excitetur, & à puncto eius, quod ſimul eſt in peripheria, lineæ ad terminos eiuſdem diametri perducantur, fiatque in oppoſito ſemicirculo arcus, cuius dictæ lineæ ſint radij: Sumpto præterea & alio quolibet puncto, non autem circuli centro, in eadem perpendiculari; ab eo ad alterum diametri terminum recta ducatur, quæ, ad partes dicti ſemicirculi oppoſiti, ceu radio, circularis linea ſit ducta, vel ita ſecetur, vt ad eiuſdem circuli ſemiperipheriam eandem habeat proportionem, quam quadratum radij ſuppoſiti circuli ad id eius rectæ lineæ, quam ab aſſumpto puncto deduximus; itemq; ab eodem linea deducatur ad alteram facti arcus extremitatem: Procreabitur ab his rectis quoddam rectilineum ſpatium, ſed vnà cum duobus illis arcubus curuilineum aliud mixtum, quod priori æquale erit.

SIT circulus ABC, cuius diameter AC, eiuſque centrum D, à quo linea ad rectos angulos erigatur ſupra AC; indè à puncto B, quod eſſe debet in ſectione peripheriæ, ducantur lineæ BA, BC, & centro B, interualloque altera illarum BA, BC arcus CGA deſcribatur; ſumpto autem quolibet alio puncto E iungatur EA, ad cuius interuallum, facto centro in E, intelligamus arcum AKCH deſcriptum, qui ad eiuſdem circuli ſemiperipheriam eandem habeat proportionem, quam quadratum ex DA ad quadratum ex EA, tùm denique iuncta EH; dico rectilineum ſpatium ABFE vtrique ſpatio æquale eſſe, nempe meniſco GK, & circuli parti FCH. Sed fieri ipſa ſpatia prius oſtendendum eſt. Iungatur CE; & quia puncta B, & E ſumpſimus in perpendiculari DBE ex centro ad diametrum AC erecta patet dictos arcus AGC, AKCH per duos dictę diametri terminos C, & A tranſire; deindè quia triangulum DEA rectangulum eſt in D; atque in primo caſu latus DA maius eſt latere DE, in ſecundo autem minus illo; habebit quadratum ex EA ad quadratum ex AD in primo caſu minorem; at in ſecundo maiorem proportionem, quam angulus BDA ad angulum DEA; quam duo videlicet recti ad tab. 8. fig. 69. & 70.

angulum

angulum C E A; imò quam ſemiperipheria circuli radij E A ad eiuſdem circuli arcum C K A; ſed vt idem quadratum A E ad ipſum A D, ita eadem ſemiperipheria circuli radij E A ad arcum H K A eiuſdem circuli; ergo in primo caſu eadem ſemiperipheria ad arcum H K A habebit minorem, at in ſecundo maiorem rationem, quam ad arcum C K A; & ideo in primo caſu H K A peripheria maior erit, ſed in ſecundo minor ipſa C K A, conſtatque propterea in illo punctum H extra, in hoc autem intra circulum A B C cadere; quod cum ita ſit ſecabitur linea C B ab ipſa H F E; atque adeò fient propoſita ſpatia. Hoc itaque præmiſſo iam quod propoſitum fuit oſtendemus.

Quoniam recta B A dupla eſt poteſtate ipſius D A erit quadrans B C G A duplus quadrantis B D A; verum eiuſdem quadrantis B D A duplus eſt etiam ſemicirculus C B A; quadrans igitur B C G A æqualis eſt ſemicirculo C B A; verùm quia quadratum D A ad quadratum A E, videlicet ſemicirculus C B A ad ſemicirculum radij A E eandem habet proportionem, quam arcus H K A ad ſemiperipheriam circuli eiuſdem arcus; quam videlicet ſector E H K A ad ſemicirculum eiuſdem ſectoris, erit ſemicirculus C B A, quadrans videlicet B G C A æqualis ſectori E H K A; quodſi commune auferatur ſpatium, remanebit ipſum F B A E, quod rectilineum eſt, æquale vtrique & meniſco G K, & ſpatio F H C, quod &c.

PROP. III. THEOR. III.

Iiſdem poſitis ſi in primo caſu D A ad A E fuerit potentia in ſubſeſquitertia, & in ſecundo ſubquadrupla proportione, erit arcus C H duodecima pars ſemiperipheriæ ipſius circuli.

QVia primùm in primo caſu ponitur quadratum ex D A ad quadratum E A, vt 3 ad 4; erit arcus H K A ad ſemiperipheriam circuli eiuſdem arcus, vt 3 ad 4, hoc eſt vt 9 ad 12. Rurſus quia D A quadratum ſubſeſquitertium eſt ipſius E A; & triangulum D E A in ſemicirculo exiſtit (quod angulus ad B rectus ſit) erit D A latus inſcripti trianguli æquilateri, & propterea angulus D E A ſexta pars erit quatuor rectorum; ipſius verò duplum, tertia pars erit quatuor rectorum; ſed duorum rectorum $\frac{2}{3}$ partes erit; quare etiam circumferentia C K A ad ſemiperipheriam circuli eiuſdem arcus erit, vt 2 ad 3; imò vt 8 ad 12; at inuertendo eadem ſemiperipheria ad eundem arcum erit, vt 12 ad 8; verùm arcus H K A ad eandem ſemiperipheriam fuit, vt 9 ad 12; ergo ex æquali arcus H K A ad arcum C K A erit vt 9 ad 8; indè per conuerſionem rationis, & conuertendo erit differentia ipſorum, nimirùm arcus C H ad arcum C K A, vt 1 ad 8; idem verò arcus C K A ad ſemiperipheriam eiuſdem circuli eſt, vt 8 ad 12; ergo rurſus ex æquali erit arcus H C ad ſemiperipheriam circuli, vt 1 ad 12.

Et in ſecundo caſu, quia ponitur quadratum ex D A ad ipſum ex A E eſſe vt 1 ad 4, erit & arcus H K A ad ſemiperipheriam ipſius circuli, vt 1 ad 4; eſt autem angulus A E C tertia pars duorum rectorum, hoc eſt circumferentia A H C ad ſemiperipheriam eiuſdem circuli eſt vt 1 ad 3, vel vt 1 $\frac{1}{3}$ ad 4; ergo inuertendo dicta ſemiperipheria ad eiuſdem arcum A H C erit vt 4 ad 1 $\frac{1}{3}$; ideoq; ex æquali arcus H K A ad arcum A H C erit vt 1 ad 1 $\frac{1}{3}$; quare A K H ad H C erit vt 1 ad $\frac{1}{3}$; eſt autem ſemiperipheria circuli, cuius arcus A K H ad hunc ipſum arcum, vt 4 ad 1; ergo rurſus ex æquali ſemiperipheria circuli, cuius arcus eſt H C ad hunc eundem arcum erit vt 4 ad $\frac{1}{3}$, ſeu vt 12 ad 1, quod &c.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si in vno oppoſitorum ſemicirculorum eiuſdem circuli duo inſcripti quadrati latera applicentur, fiatque in reliquo ſemicirculo arcus, cuius dicta latera ſint radij; triangulum rectangulum iſoſceles, quod ab iſtis applicatis & diametro conſtituitur, ſpatio inter conuexam, & concauam peripheriam intercecto æquale erit.

tab.8. fig.71.

SIT circulus A B C D, atque A B, B C ſint latera inſcripti quadrati ſemicirculo A B C applicata, itaut ex his, & diametro A C conſtet triangulum A B C rectangulum iſoſceles; tùm verò centro B, interuallo B A, vel ipſi æquali B C arcus A D C deſcribatur intra alium ſemicirculum A D C. Dico triangulum A B C æquale eſſe meniſco D, ei nimirum ſpatio, quod inter concauam peripheriam ſuppoſiti circuli, & conuexam deſcripti arcus inter-

interijcitur. Eſt enim oſtenſum in ſecunda huius propoſitione, quod quadrans B A C ſit æqualis ſemicirculo A C D; ſi igitur auferatur commune ſpatium remanebit triangulum A B C æquale meniſco D, quod &c.

PROP. V. THEOR. V.

Si in quodam ſemicirculo inſcribatur quodlibet triangulum rectangulum; deſcriptis verò duobus ſemicirculis, quorum diametri ſint latera circa angulum rectum inſcripti trianguli, ita vt eorum peripheriæ extra circulum cadant; quod inter conuexam, & concauam peripheriam interijcitur ſpatium æquale erit inſcripto triangulo.

tab.8. fig.72. SIT ſemicirculus A B C, & inſcriptum triangulum rectangulum ſit A B C; deſcribantur ſemicirculi B C D, A B E; dico triangulum A B C duobus meniſcis E, D ſimul ſumptis æquale eſſe. Nam ſemicirculus A B C ſuper hypothenuſam A C deſcriptus, duobus alijs ſemicirculis æqualis eſt, dempto propterea communi ſpatio, reliquum triangulum A B C æquabitur compoſito ex duobus reliquis meniſcis E, D, quod &c.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si in altero oppoſitorum ſemicirculorum hemihexagonum inſcribatur, in alio verò ſemicirculo & ſupra eius baſim, ſegmentum cuiuſdam circuli deſcribatur ijs ſimile, quæ inſcriptum ſemihexagonum ſupereminent; vnum ex iſtis ſimul cum illo ſpatio inter conuexam, & concauam peripheriam intericcto æquale erit prædicto ſemihexagono.

tab.8. fig.73. SIT circulus D E, cuius diameter A C, ſitque A F C ſegmentum circuli, ſimile vni E G C, quod inſcripto ſemihexagono A B E C ſuperſtat; dico hoc ſegmentum E G C vnà cum meniſco E F æquale eſſe hemihexagono A B E C. Quoniam A C quadrupla eſt ipſius E C potentia; erit figura A F C æqualis duplo ſegmento E G C, & duobus B E, B A ſimiliter inter ſe æqualibus; itaque cum ſemicirculus E ſemicirculo D ſit æqualis, ſi à ſemicir-

culo D auferantur tria ſegmenta C E, B E, B A; & à ſemicirculo E tollatur ſegmentum A F C deficiens vno ſegmento C G E, ſupererit ſemihexagonum A B E C æquale meniſco F E excedenti ſegmento E G C, quod &c.

PROP. VII. THEOR. VII.

Cylindri portio duabus ſemiellipſibus, vel ſemicirculis contenta, quarum communis ſectio ſit ſecunda diameter, vnà cum connexa cylindri ſuperficie inter eaſdem ſemiſectiones conicas interiecta, ſubſeſquialtera eſt cuiuſdam ei circumſcripti priſmatis triangularis.

tab.9. fig.74. INtelligatur circumſcriptum parallelepipedum, cuidam ſemicylindro, cuius oppoſitæ baſes ſint ſemicirculi; hoc autem vnà cum ſibi inſcripto ſemicylindro ſecetur tranſuersè plano aliquo, vt fiat in parallelepipedo ſectio B K Q A, at in ſemicylindro B C A, & recta B A ſit communis ſectio ſecantis plani, atque parallelogrammi per axem, iuxta quod ſemicylindrus exiſtit; tum verò per B A planum aliud tranſeat abſcindens vtrunque ſolidum, faciatque ſectionem B L P A in parallelepipedo, & in ſemicylindro ipſam B D A. Dico, quod portio cylindri contenta duabus ſemicylindri ſectionibus, ſeu ſemiellipſibus B C A, B D A, atque ea cylindri curua ſuperficie inter eaſdem ſemiſectiones conicas interiecta, ſubſeſquialtera eſt ſibi circumſcripti ſolidi (priſmatis nempe triangularis, vt oſtendemus) contingentis inſcriptam portionem in punctis B A, & linea C D; ſunt autem eius oppoſitæ baſes triangula A Q P, K B L. Secetur B A bifariam in E, iunganturq; C E, E D. Quoniam planum K L P Q contingit portionem cylindricam ſecundùm rectam C D, eſtque Q K communis ſectio planorum K L P Q, B K Q A, erit K Q contingens ſectionem B C A in C; verùm quia duo plana æquidiſtantia parallelepipedi, nempe K L P Q, & illud oppoſitum, in quo recta B A, ſecuimus plano A K, erit communis ſectio Q K contingens ſectionem B C A in C æquidiſtans communi ſectioni, vel ſecundæ diametro B A; & ideò iuncta E C erit ſemidiameter coniugata ipſius B A. Similiter oſtendemus L P contingentem ſectionem B D A in D, æquidiſtantem eſſe eidem B A, propterea que E D ſemidiametrum eſſe coniugatam eiuſdem B A. Deinde quia K B, Q A ſunt communes ſectiones plani ſecantis K A, duorumq; æquidiſtantium triangulorum K B L, Q A P (ſunt enim partes duorum æquidiſtantium planorum parallelepipedi) & contingunt ipſa triangula cylindri portionem in punctis B A; erunt duæ rectæ B K, A Q non tantùm parallelæ inter ſe, verùm etiam contingentes ſectionem B C A in punctis B A; ex quo ſequitur, quod dictæ B K, A Q ſint etiam æquidiſtantes eidem ſemidiametro G E. Paritérq; eodem vſi ratiocinio oſtendemus rectas B L, A P in iiſdem duobus punctis B A ſectionem B D A contingere, & eſſe inter ſe, & eidem ſemidiametro E D parallelas; quare ſpatia K A, B P erunt parallelogramma, & idcircò Q K, P L erunt inter ſe parallelæ, ac æquales, vtpote æquales vni tertiæ B A, ex quo fit, vt ſpatium K P parallelogrammum ſit; itaque circumſcriptum ſolidum Q B P priſma erit, cuius oppoſitæ baſes triangula ſunt K B L, Q A P. Extendamus inſuper per rectam K L, & punctum E planum abſcindens priſma, & ei inſcriptam cylindri portionem, ſitque priſmatis ſectio triangulum K E L; tum denique per quodlibet aſſumptum punctum F in linea B A planum aliud agamus æquidiſtans ipſi C D E ſecans pyramidem K B L E, & rurſus vtrumque dictum ſolidum, ſintque ductorum planorum ſectiones G N F, I M F, H F O; & quoniã idem planum K A ſecat plana inter ſeſe parallela triangulorum Q P A, C D E, I M F, K L B, erunt omnes communes ſectiones Q A, C E, I F, K B, inter ſe æquidiſtantes, itemque omnes A P, E D, F M, B L, pariterq; Q P, C D, I M, K L; quare, vt B E ad E F, ita K E ad E G, atque L E ad E N. Cum igitur duæ iſtæ poſtremæ rationes ſimiles ſint, neceſſe eſt rectam G N æquidiſtantem eſſe ipſi K L. Præterea quia quadratum ex C E ad quadratum ex H F eſt vt rectangulum A E B ad rectangulum A F B; & in eadem ratione eſt etiam quadratum ex E D ad quadratum ex F O; erit recta C E ad H F, vt E D ad F O; eſtque angulus H F O ęqualis angulo C E D (quod C E ęquidiſtet ipſi H F; & E D ipſi F O) triangula igitur C E D, H F O ſimilia erunt, & propterea etiam latus H O parallelum erit ipſi C D, quod eſt latus cylindri, ex quo ſequitur eandem H O rectam lineam eſſe, vtpotè cylindri latus; Itaque cùm H O parallela ſit rectæ C D, erit item parallela rectis I M, K L, & G N; atque hoc pacto triangula C E D, I F M, K B L, G N F, & H O F ſimilia ſunt. His oſtenſis, quia quadratum C E, hoc eſt ipſum I F ad quadratum F H eſt, vt rectangulum A E B ad rectangulum A F B; erit per conuerſionem rationis rectangulum A E B, hoc eſt quadratum E B ad quadratum E F, vt quadratum I F ad exceſſum ſui ipſius ſupra quadratum H F; verum, vt quadratum B E ad quadratum E F, ita quadratum K B, ſeu I F ad quadratum G F; quare vt quadratum I F ad dictum exceſſum, ita idem quadratum I F ad ipſum G F; & propterea quadratum G F æquale erit exceſſui quadrati I F ſupra H F quadratum; hoc eſt quadratum H F vnà cum quadrato G F æquale erit quadrato I F; Imò triangulum I F M priſmatis C L E æquale erit triangulo G F N pyramidis K B L E vnà cum triangulo H F O ſemicylindricæ portionis; pariterque triangulum C E D eiuſdem priſmatis æquale erit triangulo ſemiportionis dictæ C E D B, nempe ſibi ipſi; cumque etiam triangulum K B L priſmatis æquale ſit triangulo pyramidis, hoc eſt ſibi ipſi, erunt omnia triangula ſemipriſmatis C L E æqualia omnibus triangulis dictæ ſemiportionis cylindri vnà cũ omnibus triangulis pyramidis K B L E: hoc eſt ſemipriſma C L E ęquale erit ſemiportioni cylindri C E D B vnà cum pyramide K B L E, atque adeo totum priſma æquabitur toti portioni C A D B vnà cum duplo dictæ pyramidis; verùm duplum eiuſdem pyramidis tertia pars eſt totius circumſcripti priſmatis; ergo duæ reliquæ tertiæ partes eiuſdem priſmatis æquales erunt expoſitæ portioni cylindri, & idcircò hæc eadem ſubſeſquialtera erit prædicti circumſcripti priſmatis Q B P, quod &c.

21. primi conic.

ibidem.

COROLLARIVM I.

Ex vi huius demonſtrationis patet, quod, ſi deſcripta illa cylindri portio ſecetur quolibet plano H F O æquidiſtante ipſi C E D, vnumquodque ſegmentum ipſius, cuiuſmodi eſt H F O D æquale eſt ſibi circumſcripto priſmati I F L, dempto ex ea pyramidis fruſto latente in eodem priſmate: pariterque aliud ſegmentum reliquum æquatur ſibi circumſcripto priſmati Q A M, ablatis tamen pyramidibus K B L E, G N F E.

COROLLARIVM II.

Item conſtat triangulum compoſitum ex ſemidiametris coniugatis dictarum duarum ſemiellipſium, vel ſemicirculorum, vnà cum ea parte lateris cylindri inter eaſdem ſemidiametros interiecta, hoc eſt triangulum C E D baſi circumſcripti priſmatis æquale eſſe.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si per eandem rectam iacentem in plano parallelogrammi, quod eſt baſis ſemicylindri tria eundem ſemicylindrum ſecantia plana extendantur, vt ſectiones ſemiellipſes fiant, vel ſemicirculi: quam proportionem habent lineæ iungentes vertices dictarum ſemiellipſium vel ſemicirculorum amplectentium portiones cylindricas, eandem inter ſe obtinebunt portiones ipſæ: eruntque dictæ iungentes in eodem cylindri latere.

tab.9. fig.75. SIT ſemicylindrus, cuius baſes ſemicirculi ABC, IGH; & per rectam ED iacentem in parallelogrammo AH agantur tria plana, quarum ſectiones ſemiellipſes ſint aut circuli, EBD, EMD, EGD; deinde (cum centra baſium ſint KL) iungatur KL, quæ erit axis cylindri; Indè à puncto L ducta perpendiculari LB, ſemidiametro nempe coniugata ipſi AC, tranſeat per hanc, & axem LK planum ſemicylindrum ſecans, quod faciat ſectionem LBGK parallelogrammum, & ſecet plana ſemiellipſium, vel ſemicirculorum, vt communes ſectiones ſint FB, FM, FG; erunt puncta BMG (vt oſtendemus) vertices dictarum ſemiſectionum conicarum. Dico portionem cylindri, quam amplectuntur duæ ſemiſectiones EBD, EGD, ad portionem contentam duabus EBD, EMD, eſſe vt eſt linea BG ad BM. Intelligamus ductum planum ęquidiſtans parallelogrãmo per axem AH, vt ſecet cylindrum, eritq; ſectio parallelogrammum; & communis ſectio huius ſecantis plani & parallelogrammi LG, nempe recta ON æquidiſtans erit axi LK, & propterea etiam lateribus cylindri, quę ſimul ſunt in ſecante plano, ex quo fit, vt omnes lineæ ductæ intra has tres æquidiſtantes, nempe ST, XY, VZ, PQR ſimiliter ſecentur à recta ON (ſunt enim communes ſectiones dicti ſecantis plani, ac dictarum ſemiſectionum) cumq; dictum planum ſecans ſit ęquidiſtans parallelogrammo AH, erunt rectę XY, VZ, PR æquidiſtantes eidem ED, ſed linea ST ipſi AC; & ideò ſicuti TS bifariam ſecatur in N ab ipſa BL, imò ab ipſa NO; ita & linea PR bifariam in Q ſecabitur ab eadem NO, hoc eſt ab ipſa FG; idem dic de reliquis lineis XY, PR; quare conſtat rectas BF, MF, GF, eſſe ſemidiametros coniugatas diametro ED commũni ſemiellipſibus, vel ſemicirculis EBD, EMD, EGD; ideoq; perſpicuum eſt puncta BMG eſſe vertices earundem ſemiſectionum. Itaque (vt tandem propoſitum oſtendamus) cum portio cylindri EGDB ad portionem EMDB ſit vt priſma priori portioni circumſcriptum, cuius baſis æqualis eſt triangulo BFG, ad priſma aliud alteri portioni circumſcriptum baſim habens triangulum ipſi BFM æquale; eſtque vtrique priſmati altitudo communis, dupla nempe perpendicularis eius, quæ à puncto E duceretur ad planum parallelogrammi LG; erunt inſcriptæ portiones inter ſeſe, vt triangulum BFG ad triangulum BFM, imò vt recta GB ad BM, quod &c.

PROP. IX. THEOR. IX.

Oſtendendum eſt in hac ſequenti figura, quod priſma, cuius oppoſitæ baſes ſunt triangula A I 3, D F 6, vnà cum eo priſmate, cuius oppoſitæ baſes ſunt triangula L T I, E F Z, dempto quadruplo pyramidis, cuius baſis K X M, & vertex V, cum illo priſmate item ablato, cuius baſis triangulum A L 9, vnumq; latus recta A D, æquale eſt duabus cylindri portionibus L 9 8 E 5 G, & L 7 E 5 G.

SIT cylindrus duobus planis diuiſus, ita vt ſectiones A 9 8 D, AGD ſint ſegmenta ellipſium, vel circulorum, quæ ſecent ſeſe ſecundùm rectam AD ſupra centrum V circuli vel ellipſis AGD; ſecta verò bifariam AD in T iungatur TV, quam vtrinque protrahamus, vt occurrat circulo, vel ellipſi AGD in punctis CG; indè ſumpta GS æquali ipſi CT, per puncta VS, & G agantur æquidiſtantes rectæ AD, vt ſunt VMR, LSE, & HG, quæ vtrinque productæ occurrant duabus iunctis AL, DE protractis in puncta I, & F; tum autem duc G 8 latus cylindri, & à punctis I F lineas I 3, F 6 æquidiſtantes eidem lateri G 8, occurrentesque lineæ tranſeunti per 8 parallelæ ipſi IGF, in punctis 3, 6: iunctis præterea rectis 3 A, 6 D, 8 T, extendamus per lineas 3 I, IA planum ſecans cylindri portionem intra propoſita ſegmenta interceptam, faciatque in ipſius ſuperficie conuexa, oculiſque ſubiecta lineam 9 L. Et quia 3 I parallela eſt cylindri lateri G 8, imò axi eiuſdem cylindri, & recta ILA parallela eſt ipſi GC, cum pla-

tab.9. fig.76.

num C8G per axem extenſum, ſit æquidiſtans plano per 3 I, I A; erit recta 9 L latus cylindri, & ideo parallela lineæ G8; Indè ducta à centro V linea V K, diametro nempe parallelogrammi contenti lineis ℞V, V G in angulo ℞V G, agatur in plano trianguli A I 3 linea K X ipſi 3 I æquidiſtans, & M X, L Y eidem 3 A parallelæ; conueniantque M X, K X in puncto X; recta verò Y 7 Z æquidiſtet ipſi I F. His ſuppoſitis concipiamus priſma, cuius oppoſitæ baſes triangula A I 3, D F 6; itemq; aliud baſes habens oppoſitas triangula L Y I, E F Z; indè pyramidem, cuius baſis triangulum M K X, vertex autem punctum V. Dico prædicta duo priſmata, dempto compoſito ex quadruplo dictæ pyramidis, & priſmate, cuius baſis triangulum A L 9, & altitudo eadem, quam habent prædicta duo priſmata, æquale eſſe duabus cylindri portionibus L 9 8 E 5 G, L 7 E 5 G.

Quoniam quadratum I A æquale eſt quadratis A L, L I, vnà cum duplo rectanguli A L I, erit quadratum I A æquale quadrato A L vnà cum duplo rectanguli A I L, dempto quadrato I L; ſed duplo rectanguli A I L æquatur duplum quadrati M K; ergo quadratum I A æquale erit quadrato A L vnà cum duobus quadratis M K-L I; proptereà triangulum A 3 I maioris priſmatis æquale erit triangulo A 9 L portionis cylindri, ſimul cum duplo trianguli M K X pyramidis, dempto triangulo L Y I priſmatis minoris (ſunt enim hæc triangula inter ſe ſimilia, & ſimiliter deſcripta ſuper lateribus dictorum quadratorum). Prætereà quia duplex rectangulum B H P, höc eſt duplex quadratum O N, ſuperat duplum rectanguli R P H duplici rectangulo Q H P, & quadrato P H bis item aſſumpto, hic autem exceſſus æquatur quadrato QH-QP+PH; erit duplex quadratum N O maius quam duplum rectanguli R P H quadrato QH-QP+PH, vel, quod idem eſt, duplum quadrati NO-QH+QP-PH æquale erit duplici rectangulo R P H; additiſq; communiter quadratis R P, P H; quadratum R H æquale erit duplici quadrato N O, vnà cum quadratis QP, RP-QH: nam addendo quadratum P H ad -P H nihil remanet. Quare etiam triangulum R 4 H maioris priſmatis æquale erit triangulis ſibi ipſis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſuper dictis quadratorum lateribus tanquam baſibus, nempe duplici triangulo, cuius baſis N O prædictæ pyramidis, vnà cum illo, cuius baſis R P cylindri portionis inſcriptæ maiori priſmati, ſimul etiam cum eo triangulo in baſi Q P conſtituto, cylindri portionis inſcriptæ minori priſmati, dempto triangulo Q H 2 eiuſdem minoris priſmatis.

Tandem quia quadratum T G æquale eſt ſibi ipſi vnà cum quadrato S G eodem dempto, erit triangulum T G 8 maioris priſmatis æquale eidem triangulo T G 8 portionis maioris cylindri vnà cum triangulo S G 7 minoris cylindri portionis, dempto eodem triangulo S G 7, vtpotè priſmatis minoris; Cum igitur omnia triangula A I 3, R H 4, T G 8 &c. ſemipriſmatis maioris, æqualia ſint duplo omnium triangulorum pyramidis M X K V, nempe M K X, eorumq; quorum baſes N O &c. vnà cum omnibus triangulis, nempe A L 9; ijſque quorum baſes R P, T G &c. maioris ſemiportionis cylindri inſcriptæ prædicto maiori ſemipriſmati, ſimul cum omnibus triangulis, nempe S G 7, ijſque quorum baſes Q P &c. minoris ſemiportionis cylindri inſcriptæ minori ſemipriſmati L Y G, demptis tamen omnibus triangulis L I Y, Q H 2, S G 7 &c. dicti ſemipriſmatis minoris; erit ſemipriſma, cuius oppoſitæ baſes triangula A I 3, T G 8 æquale duplo pyramidis, cuius baſis triangulum M K X, & vertex V, vnà cum duabus ſemiportionibus cylindri (quarum maior eſt illa, quæ intercedit inter duo triangula A L 9, T G 8; altera verò eſt comprehenſa à minori ſemipriſmate T L G) dempto eodem ſemipriſmate. Quod ſi minus hoc ſemipriſma addatur communiter, auferatur verò illud, cuius baſis triangulum A L 9 in eadem altitudine in qua ſunt duo dicta ſemipriſmata, ſupererit priſma, cuius baſis trapetium L 9 3 I in eadem prædicta altitudine, quod vnà cum minori ſemipriſmate æquale erit duplo dictę pyramidis ſimul cum duabus ſemiportionibus cylindri, quarum maior latet inſcripta ſub dicto quadrangulari ſemipriſmate, alia verò ſub minori; Et eorum duplicia, hoc eſt priſma 9 3 I L 6 vnà cum priſmate Y L I Z erit æquale quadruplo pyramidis, cuius baſis triangulum M K X, & vertex V, vnà cum duabus portionibus cylindri L 9 8 E S G, L 7 E S G; ſi igitur auferatur communiter quadruplum dictæ pyramidis erunt dictæ duæ cylindri portiones æquales ſolido rectilineo quod remanet ablato prædicto quadruplo, quod &c.

* * *

PROP. X. THEOR. X.

Annulus hyperbolicus, cuius ſectio per axem ſint oppoſitæ ſectiones ſubſeſquialter eſt cylindri eius, cuius altitudo eſt eadem annuli, baſis verò circulus ille genitus ex aſymptotorum conuerſione, cuius circumferentia, & annuli ora ſunt in eodem plano, atque concentrica.

tab.9. fig.77. CIrca eundem axem MN intelligantur hæc ſolida rotunda, cylindri nempe, quorum per axem rectangula ſint CD, LH, TO; coni duo, quorum per axem triangula LGK, SGH; & demum annulus hyperbolicus, cuius ſectio per axem ſint oppoſitæ ſectiones CBA, EFD, quarum aſymptoti LGH, KGS, eaſque contingant in punctis BF rectæ TBV, RFO; Dico annulum hunc ſubſeſquialterum eſſe cylindri LH. Ab aſſumpto quolibet puncto ✠ agatur planum æquidiſtans circulo, cuius diameter recta LK, ſecans cylindrum TO, conum LGK, & tympanum hyperbolicum CBADFE; erunt ſectiones circuli, quorum diametri exiſtent in eodem plano parallelogrammi CD, ℣Y, ℞Z, QP. Quoniam igitur rectangulum CKE æquale eſt quadrato GF, hoc eſt MK; rectangulum verò CKE vnà cum quadrato MK, æquale eſt quadrato ME; erit quadratum MR vnà cum quadrato MK, æquale quadrato ME, & eorum dupla; quare circulus, cuius diameter TR, vnà cum illo, cuius diameter LK, æqualis erit circulo, cuius diameter CE; & eadem prorſus ratione circulus, cuius diameter VO, vnà cum circulo, cuius diameter SH æqualis erit circulo, cuius diameter AD. Rurſus rectangulum QZP, hoc eſt quadratum GF, imò ipſum ✠Y æquale eſt ſimul cum quadrato ✠Z quadrato ✠P, ergo circulus, cuius diameter ℣Y, vnà cum illo, cuius diameter ℞Z æqualis erit circulo, cuius diameter QP; circulus verò BF eſt communis vtrique ſolido cylindri, nempe TO, & prædicto Tympano; ergo cum conſtet, quod circuli omnes cylindri TO, vnà cum omnibus duorum conorum LGK, SGH, ſint æquales circulis omnibus tympani hyperbolici CBADFE, erit tympanum iſtud æquale cylindro TO, vnà cum duobus conis LGK, SGH; ſed cylindrus TO æqualis eſt differentiæ cylindrorum LH, CD; & duo coni SGH, LGK tertia pars ſunt ſimul accepti cylindri LH; Tympanum igitur prædictum æquale erit tertiæ parti cylindri LH, vnà cum differentia cylindrorum CD, LH; & ideò exceſſus, quo cylindrus CD ſuperat aggregatum tertiæ partis cylindri LH, & differentiæ cylindrorum CD, LH, qui exceſſus eſt $\frac{2}{3}$ cylindri LH, æqualis erit annulo hyperbolico CBA, DFE, quod &c.

11. ſecundi conic.

PROP. XI. THEOR. XI.

Portio conoidis hyperbolici, æqualis eſt cono portionem conoidis continenti, demptis duobus ſolidis, quorum alterum eſt conus, cuius axis æquatur dimidio tranſuerſi lateris genitricis hyperbolæ, baſis verò eſt ſectio dicti coni continentis contingens portionem, eiuſq; baſi æquidiſtans; aliud verò ſolidum cylindrus eſt, cuius baſis eſt illa dempti coni, & axis idem conoidis.

SIT conoides hyperbolicum, cuius ſectio per axem FS ſit hyperbole RFQ; ſed coni continentis ſit ſectio per eundem axem triangulum ABC; erunt igitur lineæ BA, BC aſymptoti, & FB ſemilatus tranſuerſum eiuſdem hyperbolæ RFQ. Sit deinde planum contingens conoides in F (quod æquidiſtans erit plano baſis conoidis) & propterea ſectio, quæ fit in cono ABC circulus erit, cuius diameter linea ED, & centrum F. Concepto denique in eadem hac baſi cylindro, cuius parallelogrammum per axem FS ſit EOPD. Dico conoides RFQ æquale eſſe cono ABC, demptis cono EBD, cylindroque EP. Sumatur in axe FS quodlibet punctum K, per quod planum agatur æquidiſtans plano contingenti conoides in F, ita vt ſecet conum conoides continentem, cylindrum, & conoides ipſum; eruntq; ſectiones circuli, quorum diametri erunt lineæ NI, LG, MH. Itaque quia rectangulum AQC, hoc eſt quadratum FD, imò ipſum SP, vnà cum quadrato SQ æquale eſt quadrato SC; item quia rectangulum NHI, hoc eſt quadratum FD, videlicet ipſum KG, vnà cum quadrato KH, æquale eſt quadrato KI; & denique, cum quadratum FD æquale ſit ſibi ipſi, conſtat quadrata omnia, imò omnes circuli, quorum diametri AC, NI, ED &c. fruſti AEDC coni

tab.10. fig.78.

10. ſecundi conic.

continentis conoides æquales eſſe omnibus circulis circa diametros R Q, M H &c. conoidis, vnà cum omnibus circulis cylindri E P, quorum diametri O P, L G, E D &c.. Quod cum ita ſit conus A B C æqualis erit conoidi R F Q, vnà cum cono E B D, & cylindro E P; hoc eſt conus A B D, demptis cono E B D, cylindroue E P æqualis erit conoidi R F Q, quod &c.

PROP. XII. THEOR. XII.

Si coni fruſtum intra duo parallela plana interceptum comprehendat conoidis hyperbolici portionem, ita vt vtraq; ſolida in eadem baſi conſiſtant, atque ſecundùm huius baſis circumferentiam ſe mutuò contingant, portio conoidis æqualis erit coni fruſto, dempto ex eo cono illo, cuius altitudo eſt communis portioni, baſis verò communis eſt circulus.

tab. 10. fig. 79. CIrca eundem axem C F intelligantur portio conoidis hyperbolici, & fruſtum coni, ſintque eorum figuræ genitrices A C E hyperbole, & A B D E trapetium, ita vt duo latera A B, D E contingant hyperbolam in punctis A E; latuſque B D parallelum ipſi A E in puncto C; Iunctis deinde lineis A C, A D concipiamus conum, cuius triangulum per axem A C ſit B A D. Dico conoidis portionem A C E ęqualem eſſe coni fruſto A B D E, dempto ex eo cono B A D.

Sumatur in axe C F quodlibet punctum O, perque illud agatur planum baſi A E parallelum, quo plano ſecentur tria illa, concepta ſolida, ſectiones autem ſint circuli I N, L H, I P.

16. tertij conic. Quoniam, vt quadratum contingentis C B ad id contingentis B A, ita eſt rectangulum H I L ad quadratum I A, erit permutando quadratum B C ad rectangulum H I L, vt quadratum B A ad ipſum A I, vel, vt quadratum B C ad ipſum I K; quadratum igitur B C ad rectangulum H I L eandem habet rationem, quam ad quadratum I K; & proprerea quadratum I K æquabitur rectangulo H I L: 6. ſecundi. verùm rectangulum H I L, vnà cum quadrato L O æquale eſt quadrato I O; quadratum igitur I O æquale erit duobus quadratis L O, I K ſimul ſumptis; quare etiam circulus I N, cuius radius I O æqualis erit duobus circulis I P, L H, quorum radij I L, L O.

Iam

Iam aſſumpta eadem regula A E circuli omnes A E, I N, B D &c. fruſti coni A B D E æquales ſunt omnibus circulis A E, L H &c. conoidis portionis, vnà cum omnibus circulis I P, B D &c. coni B A D; ex quo ſequitur, quod portio conoidis hyperbolici A C E, vnà cum cono B A D æqualis ſit fruſto A B D E, & dempto communiter cono B A D, erit conoidis portio A C E æqualis fruſto A B D E, dempto ex eo cono B A D, quod &c.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Hemiſphærij centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars, quæ eſt ad verticem ſit ad reliquam, vt 5 ad 3.

SIT hemiſphærium A B C, & axis eius F B ſectus ſit in O, ita vt B O ad O F habeat eam rationem, quam 5 ad 3. Dico punctum O eſſe centrum grauitatis dicti hemiſphærij. tab. 10. fig. 80. Intelligatur in eadem baſi A C, & circa eundem axem B F cylindrus A D, item & conus E F D, cuius baſis E D; ſecentur verò hæc ſolida eodem plano H I K M N G parallelo baſi A C, vel E D. Iam patet axem B F tranſire per centrum circulorum omnium A C, H G, E D, cylindri A D; pariterque eundem axem tranſire per centra omnium circulorum coni D F E, & hemiſphærij C B A; & quia circulus E D ſibi ipſi æqualis eſt ac concentricus; itidem circulus H G æqualis eſt duobus ſibi concentricis circulis N I, M K (nam rectangulum H N G, hoc eſt quadratum G C, ſiue F Q, vel Q M, vnà cum quadrato Q N æquale eſt quadrato Q G) & demum circulus A C æquatur ſibi ipſi; erit in axe B F tanquam libra, in puncto B idem pondus, ſiue ibi ſuſpenſus ſit circulus E D cylindri D A, ſiue in eodem puncto grauitet coni D F E circulus D E; eademque ratione in puncto Q erit eadem grauitas, ſiue ex eodem puncto ſuſpenſus ſit circulus H G cylindri E C, ſiue magnitudo compoſita ex duobus circulis K M, N I coni, & hemiſphærij. Demum quia tam circulus A C cylindri æque ponderat in F, quàm ipſe A C circulus hemiſphærij; liquidò conſtat omnes circulos E D, H G, A C, &c. cylindri E C idem centrum grauitatis obtinere, ac compoſitum ex omnibus circulis coni E D, K M &c., & omnibus I N, A C &c. hemiſphærij: hoc eſt patet cylindrum E C concentricum

eſſe

eſſe compoſitæ magnitudini ex cono DFE, hemiſphærioque CBA in deſcripta illa poſitione manentibus. Itaque in puncto L dimidio axis BF erit centrum grauitatis dictæ compoſitæ magnitudinis: ſumpta modo BP dimidia ipſius BL, quarta videlicet parte ipſius BF, conſtat punctum P eſſe coni DFE centrū grauitatis. *39. primi Lucæ Valerij de cētro grauitatis.* Quoniam verò BO ad OF eſt vt 5 ad 3, erit BF ad FO, vt 8 ad 3, ſed ad LO, vt 8 ad 1; quare BL ad LO erit vt 4 ad 1, & PL ad LO, vt 2 ad 1; conus autem DFE ad hemiſphærium CBA eſt vt 1 ad 2; ergo cum ſit reciprocè vt DFE conus ad hemiſphærium CBA, ita longitudo OL ad LP perſpicuum eſt punctum O eſſe centrum grauitatis hemiſphærij CBA, quod &c.

SCHOLIVM.

Eodem prorſus ratiocinio, quo ſupra vſi ſumus, conoidis hyperbolici centrum grauitatis inuenitur, attenta videlicet vndecima propoſitione huius, vel etiam duodecima.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Omnis portionis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars quæ eſt ad verticem reliquæ ſit dupla.

tab. 10. fig. 81. SIT portio conoidis parabolici ABC, cuius axis BD ſecetur in E, ita vt BE dupla ſit ED. Dico punctum E eſſe centrum grauitatis eiuſdem portionis. Intelligatur enim triangulum, cuius vertex B, baſis verò diameter AC, quod triangulum vnà cum portione conoidis eodem plano FK parallelo baſi AC abſcindatur, ſitque trianguli ſectio linea IG, portionis autem eſto circulus, cuius diameter KF. Patet omnes circulos conoidis AC, FK &c. concentricos eſſe omnibus lineis AC, GI &c. trianguli. Item conſpicuum eſt centra vtrarumque magnitudinum in eodem axe BHD reperiri. *22. primi conic. Lemma 22. in libro de dimenſione parabolæ Euāg. Torricellij.* Itaque quia quadratum AD ad ipſum FH; circulus nempe AC ad ipſum FK eſt vt linea DB ad BH, imò vt AC ad GI; ſi axis BD veluti libra concipiatur, erit in eodem puncto ipſius, tùm centrum grauitatis compoſitæ magnitudinis ex omnibus circulis AC, FK &c. portionis; tùm illud compoſitæ

ex

ex omnibus lineis AC, GI &c. trianguli, hoc eſt portio conoidis concentrica erit triangulo ABC. Verùm quia trianguli ABC centrum grauitatis eſt punctum E; erit idipſum centrum grauitatis portionis conoidis parabolici AFBKC, quod &c.

PROP. XV. THEOR. XV.

Solidum rotundum hyperbolicum infinitè latum æquale eſt cylindro, cuius oppoſitæ baſes ſunt ſolido communes, vnà cum alio cylindro recto, cuius altitudo eſt ſemiaxis ſolidi, ſemidiameter verò baſis eſt linea æqualis mediæ proportionali inter totum axem, eiuſque dimidium oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, eæque ſunt, quæ in eodem plano per ſolidi axem immiſſo cernuntur.

SIT hyperbola EB, & aſymptoti eius ED, DC contineant angulum rectum EDC, ſumptoque in hyperbola EB quolibet puncto B ab ipſo ducatur BC æquidiſtans DE; *tab. 10. fig. 82.* figuræ verò EBCDE infinitæ longitudinis verſus E intelligatur e regione ſita EDFGE prædictæ ſimiliter æqualis, adeout linea FDC vnica recta ſit, & figura ex ambabus illis compoſita ſit EBCFGE ſine fine longa; tum circa axem FC conuertatur compoſita hæc figura, vt fiat ſolidum rotundum infinitè latum, eiuſque per axem ſectio ſit figura EBIKLGE. Iam quia hyperbolis GE, EB, IK, LK, aſymptoti FDC, KDE communes ſunt, erunt dictæ quatuor hyperbolæ ſic conſtitutæ ſectiones oppoſitæ, quæ coniugatæ nuncupantur, & duo ipſarum coniugati axes erunt inter ſe æquales. Eſto igitur eorum alter MDH, & à puncto H ducta linea HSN aſymptoto EK æquidiſtante, iungatur NM, quæ erit parallela rectæ DS, nempe alteri aſymptoto FC (eſt enim MH ad HD, vt NH ad HS) cumque angulus EDC rectanguli HSD ab ipſius diametro DH bifariam ſecetur, erit rectangulum HSD quadratum, quod cum ſit circa diametrum MH alterius rectanguli HNM, hoc etiam quadratum erit; latus verò ipſius HN medium erit proportionale inter totum axem MH, eiuſque dimidium HD. Dico vniuerſum ſolidum EFKC infinitè extenſum ex partibus EK æquale eſſe cylindro recto, cuius baſis æqualis ſit circulo circa ſemidiametrum HN, axis vero ſit

recta

recta D C, vnà cum cylindro G I, cuius axis F C. Intelligantur ſuperficies cylindricæ quotlibet B G L I, H M, Q O, circa eundem axem F C, atque intra ſolidum infinitè extenſum E F K C, & quia rectangula D C I, D R N, D ✠ P ſunt inter ſe æqualia, erunt etiam ipſorum quadrupla, nempè rectangula L I B, M N H, O P Q æqualia inter ſe. Verùm quia ſuperficies cylindrica G B I L ad circulum, cuius radius X Z, eſt vt rectangulum L I B ad quadratum X Z, nempe ad rectangulum quadratum M N H, quæ ſpatia ſunt æqualia, erit dicta ſuperficies cylindrica G L I B æqualis circulo, cuius radius X Z; eademque ratione ſuperficies cylindrica M H æqualis erit circulo, cuius radius N H; itemq; ſuperficies Q O circulo, cuius radius T V æqualis erit; & hoc ſemper verificatur vbicunque accepta ſint puncta I N P. Cum igitur omnes cylindricæ ſuperficies G L I B, H M, Q O, &c., æquales ſint omnibus circulis, quorum ſemidiametri X Z, N H, T V, &c. patet vniuerſum ſolidum rotundum infinitè latum E F K C æquale eſſe cylindro recto, cuius altitudo eſt D C, ſolidi nempe ſemiaxis, & baſis circulus, cuius radius S R, ſeu N M eſt media proportionalis inter totum axem H M, eiuſq; dimidium M D &c. vnà cum cylindro G L I B, circa axem F C, quod &c.

22. ſecundi conic.

5. primi Euang. Torricellij de ſphæra &c.

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Sit A M C E ſemiſectio per axem A E ſolidi prædicti, & applicetur ipſi A E rectangulum B E, ita ut B A ſit æqualis ſemiaxi D M oppoſitarum ſectionum, oſtendendum eſt punctum D eſſe centrum grauitatis plani B E C M A, quamuis infinitæ longitudinis verſus C, dempto rectangulo A F.

tab. 10. fig. 83.

QVoniam oſtendimus in præcedenti propoſitione, quod ſolidum rotundum, & infinitè latum genitum ex conuerſione plani F K C circa axem F C eſt æquale cylindro genito ex conuerſione rectanguli Z R circa axem ✠ Z, vnà cum cylindro G I, cuius axis F C, eſtque C D ad C F longitudine, vt D M ad M N, ſeu ad X Z potentia; ſi concipiatur cylindrus, cuius altitudo C F, & baſis ſemidiameter D M; erit hic æqualis cylindro prædicto, cuius axis ✠ Z; & ideò conſtat conceptum hunc cylindrum æqualem eſſe ſolido F K C E infinitæ latitudinis, dempto ex eo cylindro G I, illo nempe, qui fit ex conuerſione rectanguli C L circa axem F C; hoc eſt, in præſenti etiam figura, liquet cylindrum genitum ex conuerſione rectanguli B E circa axem A E æqualem eſſe ſolido rotundo, ac infinitæ latitudinis, ex reuolutione plani E F C M A circa eundem axem E A progenito, dempto tamen ex hoc ſolido, cylindro, cuius ſemirectangulum ad axem eſt A F. Momentum igitur rectanguli B E momento plani F C M infinitæ longitudinis verſus C æquale erit, ſi planum vniuerſum E B A M C F E ſuper recta E A libretur, & rectangulum A F nullius ponderis concipiatur. Erit igitur in linea finita E A centrum grauitatis prædictorum duorum planorum ſic conſtitutorum tanquam vnius magnitudinis, & ideò (licet incredibile videatur) cum magnitudo hæc habeat grauitatis centrum, illud erit etiam in diametro G C eiuſdem planæ magnitudinis; quare in D communi ſectione linearum A E, G C reperitur, quod &c.

ex vltimo lemmate 31. Torricellij in dimenſ. parabolæ.

SCHOLIVM.

Hæc ego Theoremata, quorum nonnulla ex principijs geometricis deduxeram, Caualleriana methodo expeditius demonſtraui, quamquam hemiſphærij, & conoidis parabolici centra grauitatis rimatus iampridem fuerit geometricè ſubtiliſſimus noſtri æui Archimedes Lucas Valerius. Fateor methodum indiuiſibilium magnum eſſe in geometria compendium, præſertim in dimenſionibus ſolidorum, quantumuis irregularium, opus plenum ambagibus ſi geometricis rationibus velimus vti. Incedendum tamen eſt cautè, contingit enim non raro, vt ratiocinatio illa Caualleri minimè ſuccedat, præſertim vbi de ſuperficiebus ſolidorum rotundorum agitur: en exemplum.

ESto ſphœra, cuius axis A B, quæ ſecetur quibuslibet planis ad axem erectis C D, E F, G H, &c. dicam totam ſphœræ ſuperficiem ad ſui portionem E B F habere eandem rationem, quam habet circulus ad ſui ſegmentum E B F. Patet enim ſectiones omnes C D, E F, G H, &c. eſſe circulos circa diametros C D, E F, G H, &c. inter ſe parallelos; quare etiam eorundem circulorum peripheriæ inter ſe æquidiſtabunt; itemq; diametri inter ſe parallelæ erunt. Et quia peripheria circa diametrum C D ad illam

tab. 10. fig. 84.

circa

circa diametrum E F eſt vt diameter C D ad E F, pariterque peripheria circa diametrum E F ad peripheriam circa diametrum G H eſt vt diameter E F ad diametrum G H; erunt coniunctim omnes peripheriæ circa C D, E F, H G, ad omnes peripherias circa E F, G H &c., vt omnes diametri C D, F E, H G &c. ad omnes diametros E F, G H &c.: hoc eſt tota ſphœræ ſuperficies A E B F ad ſui partem E B F habebit eam rationem, quam habet circulus ad ſui ſegmentum E B F, quod tamen falſum eſt; circulus enim A C B D ad ſui ſegmentum E B F minus ſemicirculo maiorem habet rationem, quam quadratum A B ad quadratum rectæ B E, hoc eſt quam ſuperficies ſphœræ ad ſui portionem E B F; nàm circulus, cuius radius A B, æqualis eſt toti ſphœræ ſuperficiei, circulus verò, cuius radius B E, æquatur ſuperficiei E B F eiuſdem ſphœræ; quare ſuperficies ſphœræ ad ſui portionem E B F eſt vt quadratum ex A B ad quadratum ex B E, ſeu vt triangulum A B E ad triangulum E I B: ponitur verò eſſe in eadem ratione circulus A B ad ſui ſegmentum E B F, vel ſemicirculus A E B ad trilineum E B I; ergo & reliqua ſpatia in eadem ratione erunt: hoc eſt ſegmenta A E C, E B G ſimul, ad ſegmentum E B G, erunt vt triangulum A B E ad triangulum E I B, vel rurſus vt quadratum A B ad quadratum B E, imò vt aggregatum quadratorum A E, E B ad ipſum E B; ſed circuli ſegmentum, cuius baſis A E ſimile ipſi E B G cadit intra ſegmentum A C E; ergo ſegmentum A C E ad ſegmentum E G B maiorem habebit rationem, quam quadratum A E ad quadratum E B, & coniunctim duo ſegmenta A E C, E B G ad ſegmentum E B G maiorem etiam proportionem habebunt, quam duo quadrata A E, E B ſimul, hoc eſt ipſum A B ad quadratum E B, vel quam triangulum A E B ad ipſum E B I; quare & duæ ſimul antecedentes ad duas ſimul conſequentes, hoc eſt ſemicirculus ad trilineum A G B I, ſeu duplum ad duplum, circulus nimirum ad ſui ſegmentum E B F maiorem habebit rationem, quam triangulum A E B ad ipſum E B I, vel maiorem quam quadratum A B ad B E, quod &c.

E contra ſi conum pro ſphæra prædicto ratiocinio ſubijcias verum deduces, ita vt tota ſuperficies conica ad ſui partem intra verticem coni, & planum eius baſi æquidiſtans interiectam ſit vt triangulum per axem ad triangulum illud inter dictum verticem, & prædictum planum interceptum, quod pars eſt eiuſdem per axem trianguli.

Hinc vides, in ſolidorum rotundorum ſuperficiebus dimetiendis, quam incerta ſit methodus cæteroquin ingenioſiſſima indiuiſibilium.

FINIS.

Pag.	*lin.*	*Errata.*	*Correctiones.*
4 *& alibi*	31	eorumdem	eorundem
8	37	Quod ſi datis duabus rationibus	Quod ſi dentur duæ rationes
10	*in marg.*	fig. 9.	fig. 10.
10	*in marg.*	fig. 10.	fig. 12.
12	*in marg.*	fig. 10.	fig. 12.
13	13	deriuantium	deriuatorum
15	23	ex E D in E B	ex E D in A B
19	*prima*	*Deleantur hæc verba:*	In inferiori figura eiuſdem tertij elementi.
27	15	eadem rationem	eadem ratione
31	4	L K	L M
32	33	℞ ad ✛	℞ ad X
33	12	N I Q M H P	N I, Q M, H P,
34	29	centtum	centrum
41	6	ad F ad G	ad E ad G
42	*vltima*	. Pariterq;	, pariterq;
43	10	triangula latera	trianguli latera
44	18	C E ad E F	C D ad D F
46	23	& O B	& O E
51	*in marg.*	tab. 1. fig. 5.	tab. 7. fig. 57.
72	13	æquale eſſe	æqualia eſſe
75	*vltima*	circuli	circulos

Ad exprimendum *plus* more algebrico, ex penuria ſigni opportuni +, vſi ſumus hoc alio, etſi non vſitato ✛, quo etiam non rarò vtimur in ſupplementum literarum.

IMPRIMATVR.

Fr. Antonius Maria Cruceius Sac. Th. Magiſter, & Commiſſarius Sancti Officij Mediolani.

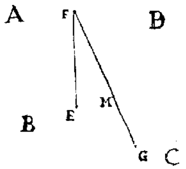
Iacobus Saita Canonicus Ambroſianæ Baſilicæ pro Eminentiſſimo D. D. Cardinali Archiepiſcopo.

Franciſcus Arbona pro Excellentiſſimo Senatu.

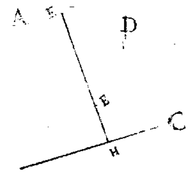
MEDIOLANI
Ex Typographia Ludouici Montiæ.
MDCLXXVIII.

I

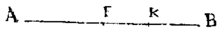
1



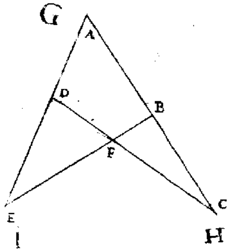
2



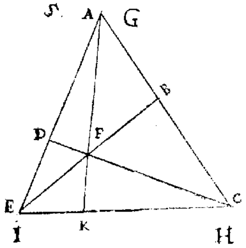
3



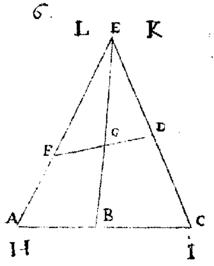
4



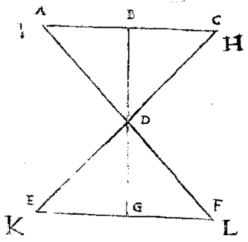
5



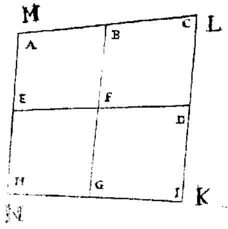
6



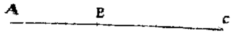
7



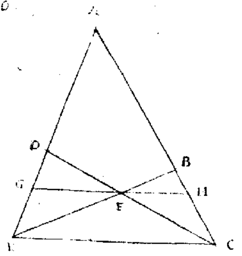
8



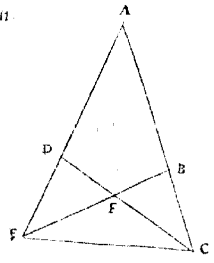
9



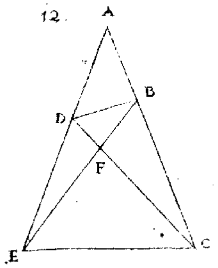
10



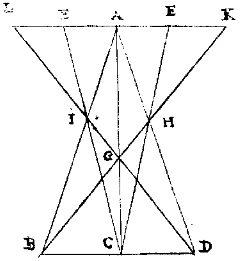
11

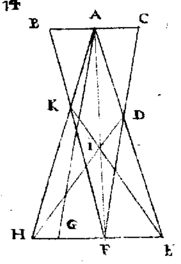


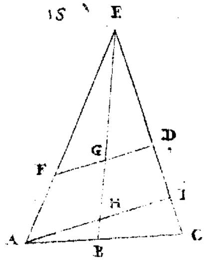
12

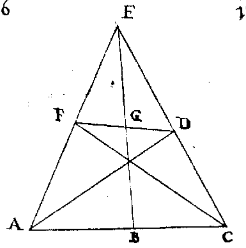


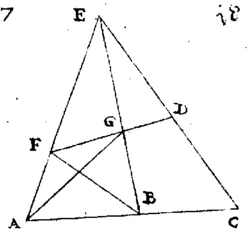
II

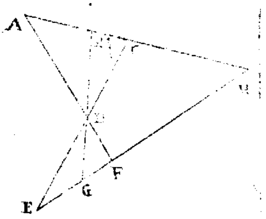
13


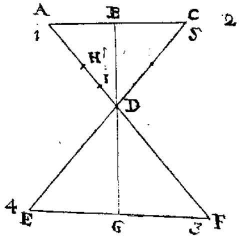
14


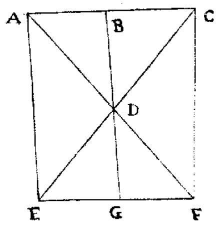
15


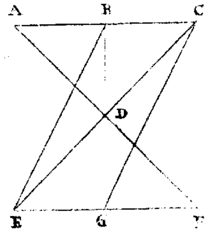
16


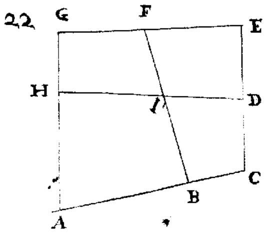
17


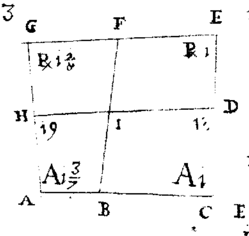
18


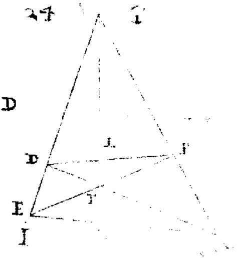
19


20


21


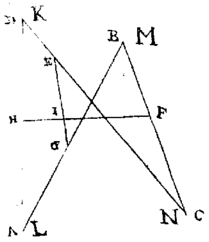
22


23


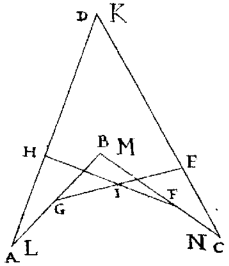
24


III

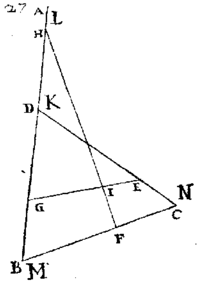
25



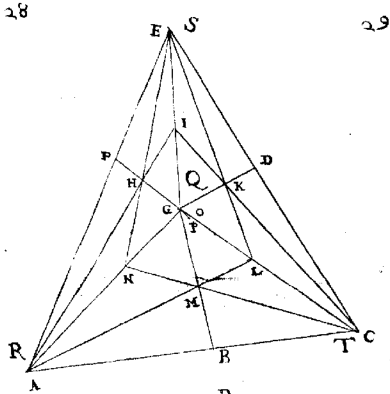
26



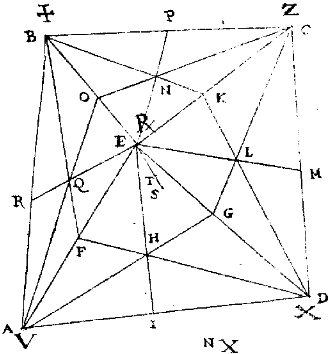
27



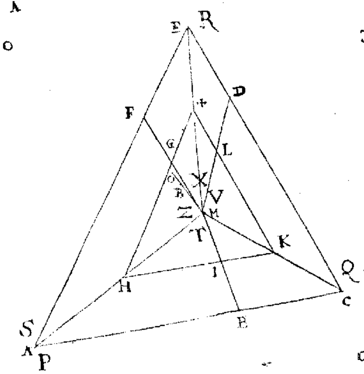
28



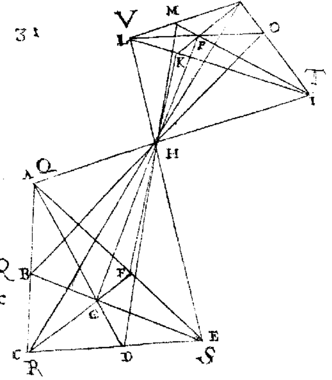
29



30

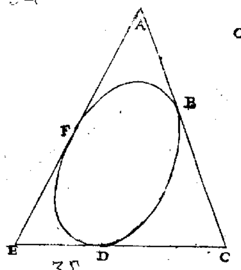


31

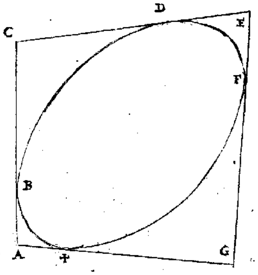


IIII

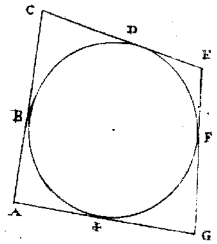
32



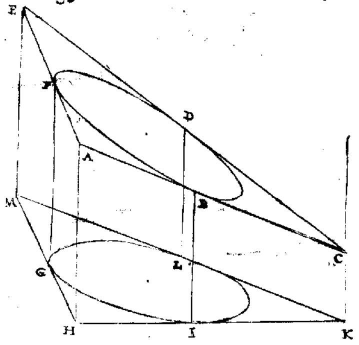
33



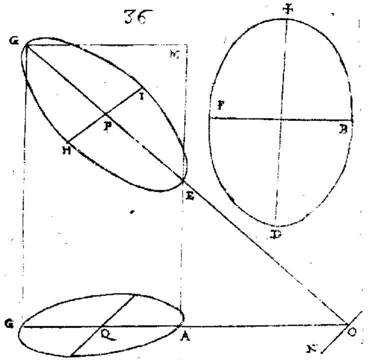
34



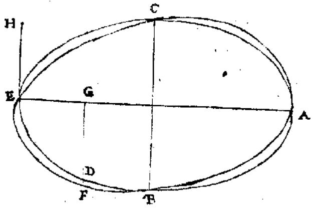
35



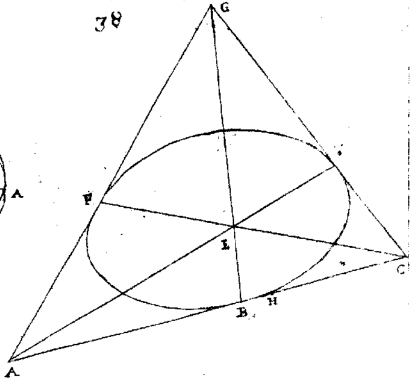
36



37

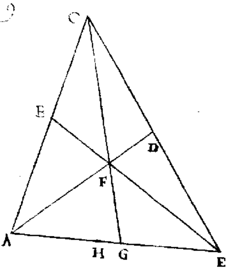


38

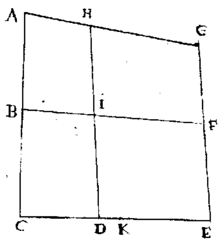


V

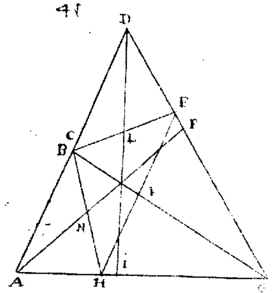
39



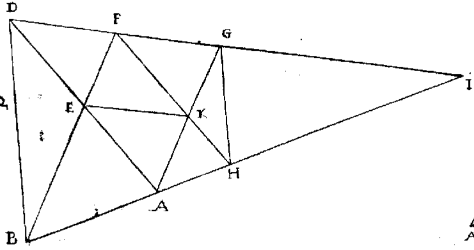
40



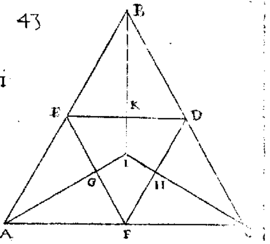
41



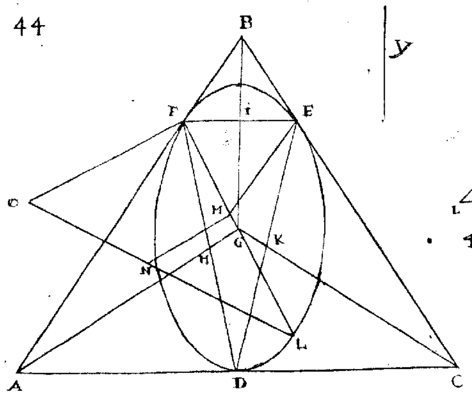
42



43

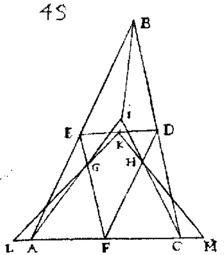


44

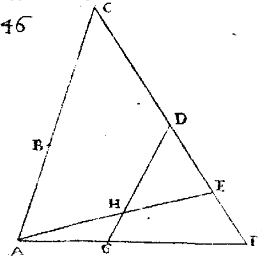


y

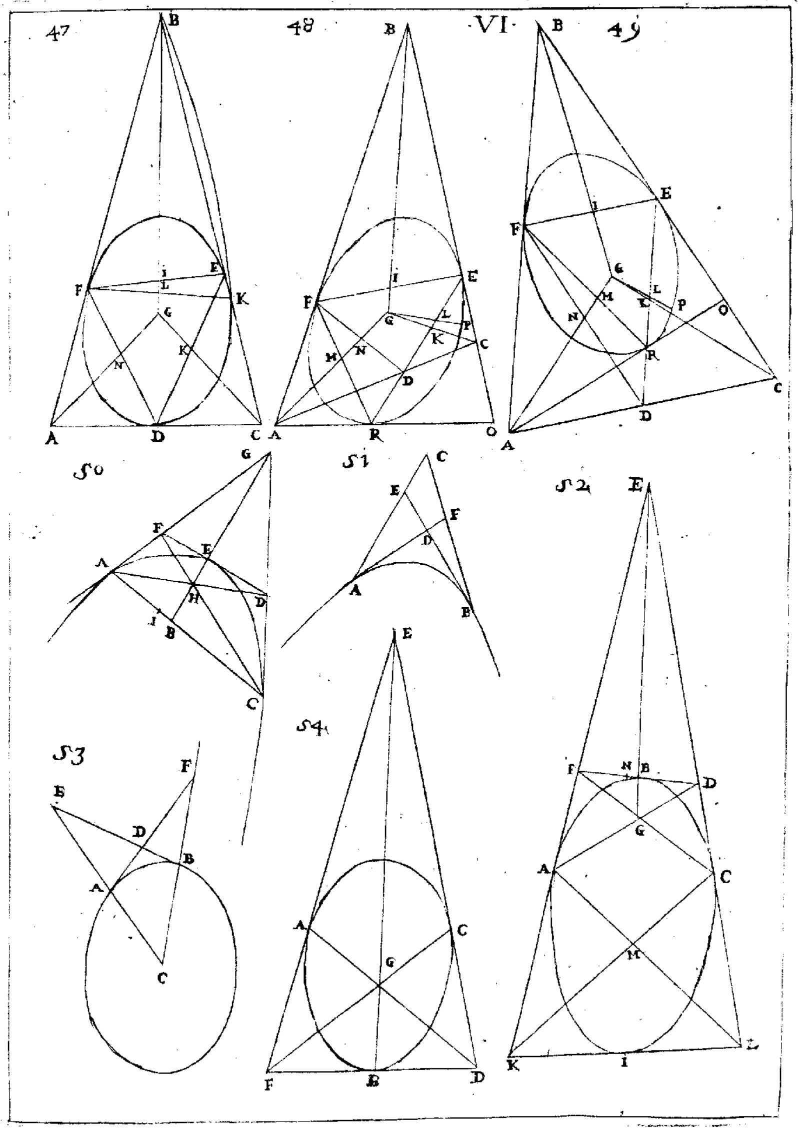
45



46

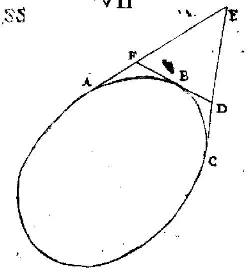


VI

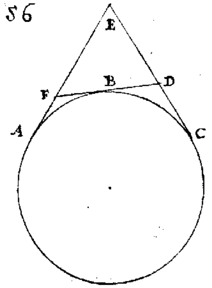

47
B
F
I
L
E
K
G
N
K
A
D
C
48
B
I
E
F
G
L
P
C
K
M
N
D
A
R
O
49
B
E
F
I
G
M
L
K
P
O
N
R
C
D
A
50
G
F
E
A
H
D
I
B
C
51
C
E
F
D
A
B
52
E
F
N
B
D
G
A
C
M
K
I
L
53
F
E
D
B
A
C
54
E
A
C
G
F
B
D

VII

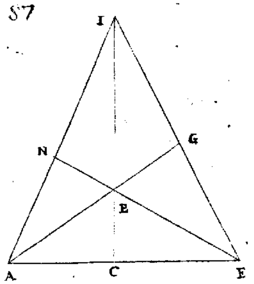
55



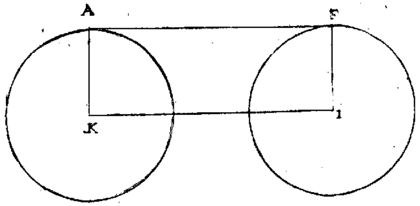
56



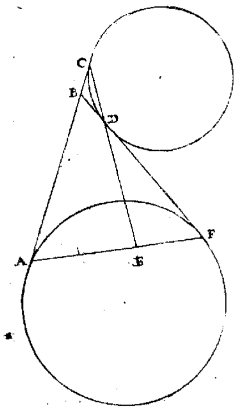
57



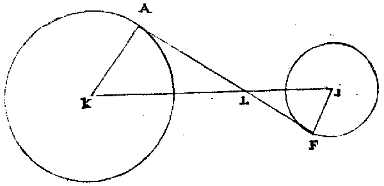
58



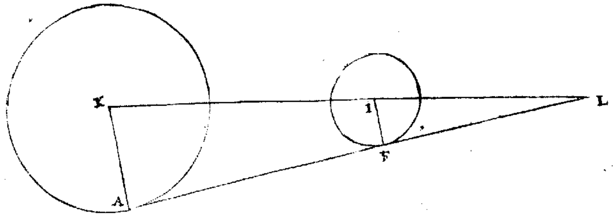
59



60

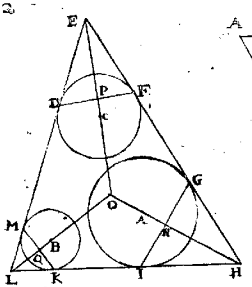


61

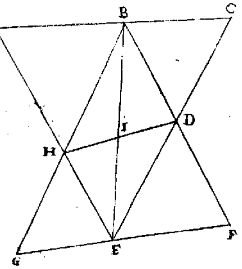


VIII

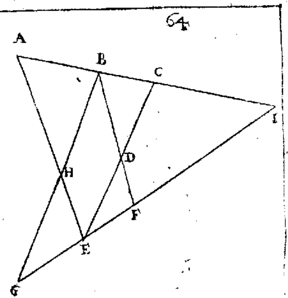
62



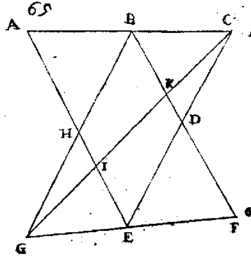
63



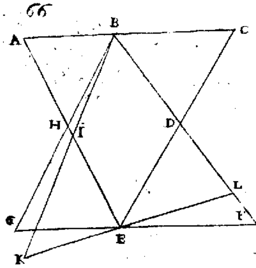
64



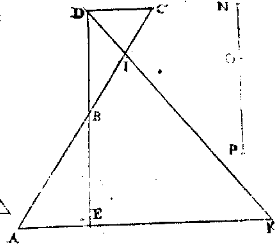
65



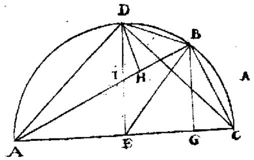
66



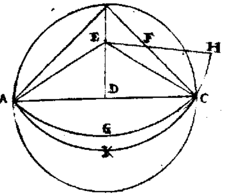
67



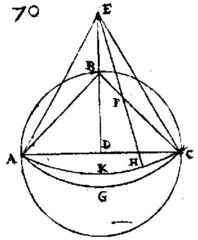
68



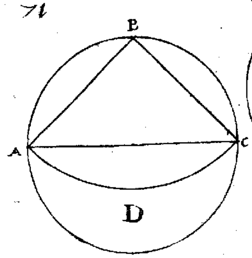
69



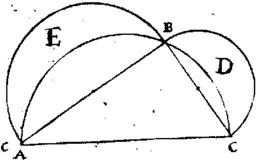
70



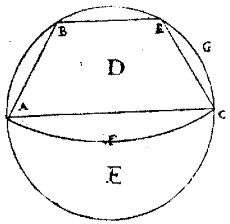
71



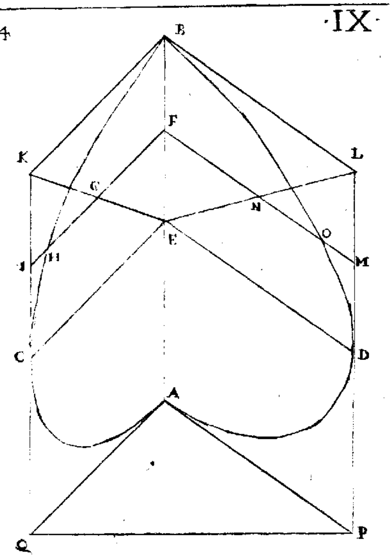
72



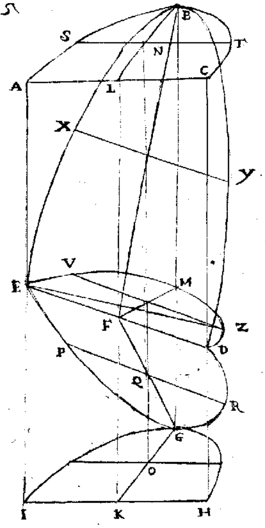
73



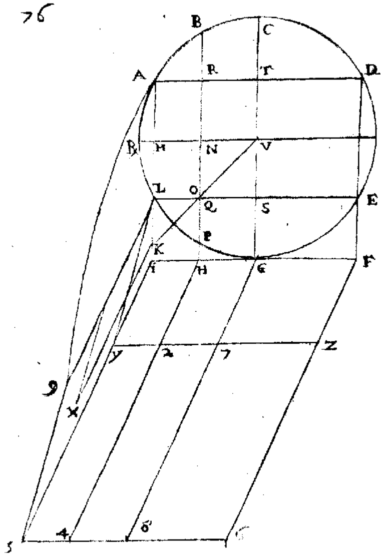
74


B
F
K
L
G
N
O
I
H
E
M
C
D
A
Q
P

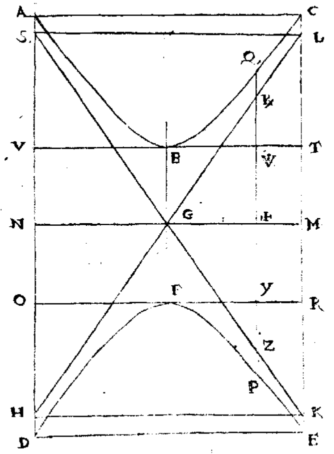
75


B
S
N
T
A
L
C
X
y
V
M
E
F
Z
D
P
Q
R
G
O
I
K
H

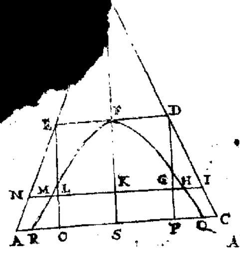
76


B
C
A
R
T
D
B
H
N
V
L
O
Q
S
E
P
K
I
H
G
F
y
2
7
Z
9
X
5
4
8
6

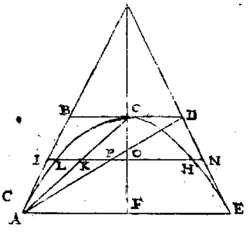
77


A
C
S
L
Q
R
V
B
V
T
N
G
F
M
O
F
y
R
Z
P
H
K
D
E

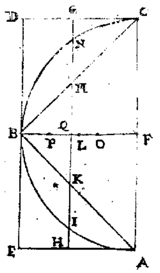
X



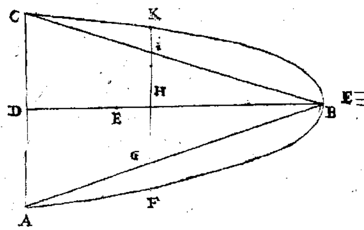
79



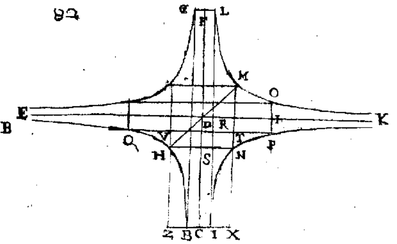
80



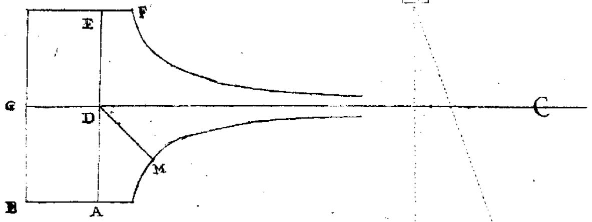
81



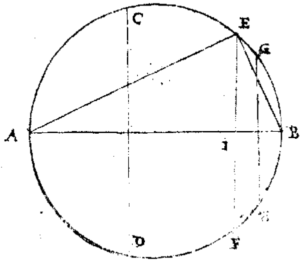
82



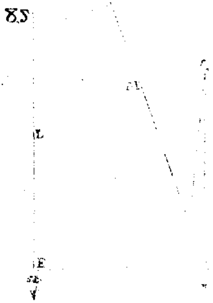
83



84



85



[illegible]

[illegible]

[illegible]

The 2